

やさしいすうがくのうた

kuku81¹

平成 21 年 5 月 17 日

¹著作権は放棄しません。 — mailto : sasanqua9[at]gmail.com —
<http://sasanqua9.dousetsu.com/>

目次

はじまり.	- 6 -
数.	- 8 -
ひとつ.	- 9 -
名前.	- 10 -
足し算.	- 14 -
数字.	- 19 -
数字の足し算.	- 22 -
掛け算.	- 26 -
数字の掛け算.	- 31 -
イコール.	- 34 -
引き算.	- 37 -
ちょっとひとこと.	- 39 -
→と列と.	- 40 -
→と足し算.	- 42 -
→と掛け算.	- 44 -
0 が基準.	- 47 -
→と引き算.	- 49 -
負の数.	- 52 -
負の数の足し算.	- 55 -
負の数の引き算.	- 58 -
負の数の掛け算.	- 59 -
文字と規則性.	- 62 -
文字式.	- 64 -
天下り.	- 68 -
割り算.	- 71 -
定規と割り算.	- 74 -
分数.	- 79 -
分数の大きさ比べ.	- 81 -
別名探し.	- 84 -

通分.	- 87 -
→と分数.	- 89 -
数の種類.	- 91 -
数直線.	- 94 -
分数の足し算.	- 97 -
分数の掛け算.	- 101 -
分配法則.	- 105 -
また分数の掛け算.	- 109 -
分数の割り算.	- 110 -
軽くまとめ.	- 114 -
逆算.	- 116 -
記号だけで.	- 118 -
連分数.	- 121 -
方程式.	- 123 -
省略と順序.	- 130 -
二次方程式.	- 135 -
はんぶんこ.	- 139 -
$\sqrt{\quad}$.	- 143 -
カボチャの馬車.	- 149 -
解の公式.	- 153 -
もうすこし $\sqrt{\quad}$.	- 157 -
代数的数.	- 161 -
小数.	- 166 -
小数の長所と短所.	- 168 -
無理やり.	- 173 -
...	- 176 -
すきま.	- 184 -
極限.	- 187 -
極限と条件.	- 192 -
実数.	- 196 -
実数の先にあるもの.	- 200 -

後ろの後ろは前.	- 201 -
複素数.	- 203 -
複素平面と計算と.	- 206 -
左の左は…?	- 217 -
あとがき.	- 218 -

やさしいすうがくのうた.

そんな名前をつけてみた.

何が言いたいのかと聞かれたら,

それはもう, いろんなことが言いたい.

だからあえて, 「うた」にした.

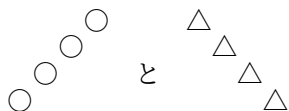
「うた」のほうが伝わるかな, と思ったから.

はじまり.

□□□ と ○○○ って, 何だか似てない?



とか, 共通点がたくさんあるよね.



これも, いろいろ同じだ.

じゃあ,



だったら?

今までと比べて, 共通点が減ったかな?

そうかもね.



似てるところと, 似てないところがある.

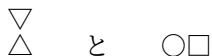
だんだん似てないところが増えてきたけど.



とか,



とか,



とか.

とても似てるとはいえない…

かもしれないけど.

でも, どの二つを比べても,

「何かがおんなじ」だよね.

それが, 「数」だね.

すう. かず.

数.

□と○と△と.

どれもすべて,「ひとつ」ずつ.

□□と○○と△△と.

どれもすべて,「ふたつ」ずつ.

□□□と○○○と△△△と.

どれもすべて,「みっつ」ずつ.

「共通のなにか」が, 数.

数というのは,

共通する性質の名称.

数の名称.

○

「いち」「ひとつ」

○○

「に」「ふたつ」

○○○

「さん」「みっつ」

○○○○

「よん」「よっつ」「し」

○○○○○

「ご」「いつつ」

○○○○○○

「ろく」「むっつ」

○○○○○○○

「なな」「ななつ」「しち」

○○○○○○○○

「はち」「やっつ」

○○○○○○○○○

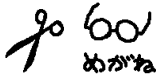
「きゅう」「このつ」「く」

○○○○○○○○○○

「じゅう」「とお」

ひとつ.

「ひとつ」って何だろう？



「ひとつ」に見えるけど、「ふたつ」にも見える.

「ひとつ」で「ふたつ」.

「ふたつ」で「ひとつ」.

「ひとつ」って、何だ？

うーん. 答え, というほどのことじゃないけど.

「ひとつ」が何なのかは, 自分で決めることなんだ.



「よっつ」によきによきしてるけど,

(「よっつ」じゃなくて「いつつ」かな,)

とにかくこれは「ひとつ」のフォーク.



くし.

たくさんによきによきしてるけど,

これで「ひとつ」.

「ひとつ」は自由に決めていい.

これは, とても大切なこと.

名前.

さて. もっとたくさんのに,
名前をつけてあげたい.

でも, 全部バラバラだったら…

○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

↑これに対応する名前は, 今日から

「かつかいしゅう」にしよう.

「かつかいしゅう」が「ひとつ」増えたら,

「さかもとりょうま」ね. ↓

○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

そんなの, いやだ.

だって, おぼえるの苦手だから.

じゃあ, どうする?

「じゅう」の次は

○○○○○○○○○○○○○○

だけれど.

○○○○○○○○○○○○ ○

「じゅう」と「いち」だから,

「じゅういち」にする.

その次は?

○○○○○○○○○○○○○○

○○○○○○○○○○○○ ○○

「じゅう」と「に」だから

「じゅうに」にしてみる.

○○○○○○○○○○○○ ○○○○○○

これは、「じゅうろく」.

○○○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○○

「じゅう」が「ふたつ」で「じゅうじゅう」?

何だか焼肉みたい.

でも, そんなことはなくて.

「に」個「じゅう」があるから, 「にじゅう」なのだ.

○○○○○○○○○○○○

○○○○○○○○○○○○

○○○○○○○○○○○○

「さんじゅう」

もう, あとは分かるよね.

こんな風に名前をつける.

でも.

「じゅういち」

○○○○○○○○○○○○ ○

は,

○○○○ ○○○○○○○○

こんな風にわけて,

「よんなな」と呼んでもいい気がする.

どうして「じゅう」を「ひとつ」にするんだろう?

たとえば別に「じゅう」じゃなくても,

○○○○○○○

「ろく」が「ひとつ」でもいい気がする.

実際, 問題はなにもない.

だけどね.

どうせ何かを「ひとつ」にするんだったら、
みんなで同じものを使ったほうがわかりやすい.

だから、「じゅう」にしとく.

みんなが「じゅう」を使うんだったら.

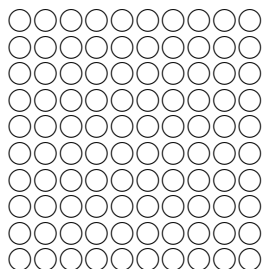
さて.

さっきの続き.

「きゅう」個の「じゅう」で「きゅうじゅう」.
じゃあ、「じゅう」が「じゅう」だったら…

今度こそ、「じゅうじゅう」?

やっぱりそんなことはなくて、
「じゅう」が「じゅう」には、新しい名前をつけるの.



「ひゃく」

こんなにたくさん書くの、大変だね.

そういえば.

どうして数字を使わないのか
気になっている人がいるかもね.

どうしてだと思う？

それはね.

数字を使わなくても,
数を感じることはできる
ということを伝えたかったから.

数字は, 数を表す道具でしかなくて.
数そのものは, もっと別のところにあって.
そんなことを, 感じてほしくて.

むずかしい？

そうかもね.

でも, きっとわかるから.

足し算.

○○○ と ○○○○
「みっつ」と「よっつ」
一緒にしたら、
○○○○○○○
「ななつ」

さっき出てきた話だけど、
○○○○ と ○○○○○○○○
「よん」と「なな」
このふたつを合わせてできる数は、
○○○○○○○○○○○○○
「じゅういち」

これが足し算だったね.

じゃあ. もし,
「にじゅういち」と「にじゅうよん」だったら,
どうする?

○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○
と
○○○○○○○○○○○○○○○○○○

これを数えたら「さんじゅうご」になるから,
「さんじゅうご」.

でも, もうちょっと賢いやり方がある.

「にじゅういち」は「にじゅう」と「いち」だから,

もっと言う、「じゅう」と「じゅう」と「いち」だから、
○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○ ○
こんな風に並んでいるのが自然。

「じゅうよん」も一緒。
○○○○○○○○○○ ○○○○
こう並べておく。

そうすると、
○○○○○○○○○○が「みつつ」あって、
○が「いつつ」あるから、
「さんじゅうご」だね。

同じことを、何度もしつこく。
○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○ ○
を「じゅう」「じゅう」「いち」と書いて、
○○○○○○○○○○ ○○○○
を「じゅう」「いち」「いち」「いち」「いち」と書くと、
二つ合わせて
「じゅう」 「いち」
「じゅう」 「いち」
「じゅう」 「いち」
「いち」
「いち」

こういうことになる。
こうすると、○をたくさん書かなくていいね。

ではでは。
「ひゃくにじゅうさん」と

「よんひゃくさんじゅうご」を足すときは？

これを○を使って書いていたら、

かなり大変そう.

でも、「ひゃく」「じゅう」「いち」を使えば、

「ひゃくにじゅうさん」は

「ひゃく」	「じゅう」	「いち」
	「じゅう」	「いち」
		「いち」

こうなって、「よんひゃくさんじゅうご」は

「ひゃく」	「じゅう」	「いち」
「ひゃく」	「じゅう」	「いち」
「ひゃく」	「じゅう」	「いち」
「ひゃく」		「いち」
		「いち」

になる.

だから、二つ合わせて

「ひゃく」	「じゅう」	「いち」
「ひゃく」	「じゅう」	「いち」
「ひゃく」	「じゅう」	「いち」
「ひゃく」	「じゅう」	「いち」
「ひゃく」	「じゅう」	「いち」
		「いち」
		「いち」
		「いち」

「ごひゃくごじゅうはち」だね.

これは, 日常生活でもお世話になっている.
百円玉と十円玉と一円玉.

「ひゃく」は百円玉と同じで,
「じゅう」は十円玉と同じで,
「いち」は一円玉と同じ役割を持っている.

このコインたちは,
個性的で分かりやすい.

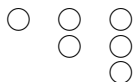
でも, 実は.

「ひゃく」	「じゅう」	「いち」
	「じゅう」	「いち」
		「いち」

みたいに, きちんと並んでたら,
コインの個性はなくてもいい.

左が「ひゃく」で,
真ん中が「じゅう」で,

右が「いち」だって分かっていたら、



いっそんな風にしてもいいよね.

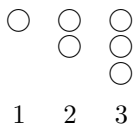
コインに個性がなくても.

左が「ひゃく」で、
真ん中が「じゅう」で、
右が「いち」.

そんなルールさえあれば、
ただそこにコインを置くだけで
大きな数が表現できる.

これを、「そのまま」読むと、
「いち」「に」「さん」.

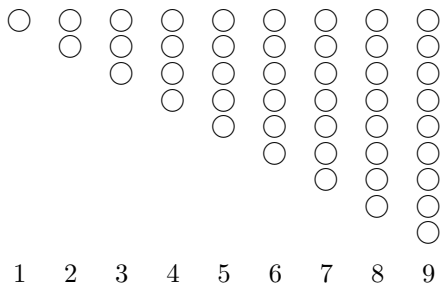
おなじみの数字を使って書けば、



で、123 になるのだった.

数字.

ようやくできた, おなじみの数字.
正しくは, 算用数字というけれども.



それぞれの数には,
こんな風に数字を対応させるのだった.

さて. この数字を使えば,

「にひゃくろくじゅういち」は 261

「さんびゃくにじゅうご」は 325

すごく簡単に書ける.

もちろん, さっきの

「ひゃく」「じゅう」「いち」

のルールを忘れちゃいけないけどね.

ところで、この数字を使うとき、

「ひゃく」は？

1 になるのかな。

「じゅう」は？

1 こう書けばよいのかな。

「いち」は？

1 こういうことになるね。

これって、

なんか、分かりにくくない？

「ひゃく」も「じゅう」も「いち」も一緒？

どうしてこんな問題があるのかというと、

「何もない」ところを無視しているから、

だから、どこに1があるのか分からなくなる。

というわけで、

「何もない」ことをアピールする数字があれば

そんな問題は起こらなくてすむ。

だから、「何もない」ときには0と書くことにすると、

「ひゃく」は 100

「じゅう」は 010

「いち」は 001

ほら、ちゃんと表せた。

「ひゃく」を 100 と表せば、

「いち」は 001 じゃなくて、
もっと単純に 1 で十分だ。
「じゅう」だって、10 でいいね。

今、唐突に出てきた 0。

「ゼロ」は、見つけるのがちょっと難しいけれど、
ちゃんと立派な数なのだ。

数字の足し算.

数字を使った足し算を考えてみる.

163 と 214 だったら…

ならべてかく.

$$\begin{array}{r} 163 \\ 214 \\ \hline \end{array}$$

最初は, 右端の「いち」の数から考えてみる.

3 と 4 だから, 7 になる.

$$\begin{array}{r} 163 \\ 214 \\ \hline 7 \end{array}$$

次は, 「じゅう」の番だ.

6 と 1 でも 7 になる.

$$\begin{array}{r} 163 \\ 214 \\ \hline 77 \end{array}$$

今度は, 「ひゃく」.

1 と 2 で 3 になる.

$$\begin{array}{r}
 163 \\
 214 \\
 \hline
 377
 \end{array}$$

だから、こたえは 377.

ところで、いま、

3 と 4 で 7

6 と 1 で 7

1 と 2 で 3

なんてさらりと言ってしまったけれど、

それは、3 とか 4 とかいう数字をじっと見ても
分からないよ？

3 と 4 で 7 になるということは、

3 という数字が ○○○ に対応してて、

4 という数字が ○○○○ に対応しているという、

数字の「意味」を考えて

はじめてわかること。

数字が、その数のすべてを

語ってくれるわけではないから。

まあ、実際のところ、

3 と 4 で 7 になることを

毎回考えている人は少ないと思う。

ほとんどの人は、覚えてるんじゃないだろうか。

さて.

数字を使うときは、
ふたつの数字の足し算を覚えてしまえば、
どんな足し算でも計算できる.

$$\begin{array}{r} 384926 \\ 213052 \\ \hline \end{array}$$

こんな二つの数の足し算を
考えたとしても、
ひとつひとつの足し算さえ分かっていたら、
計算できてしまう。
それは、なんだかすごいこと。
…みたいな気がする。

数えてみたらわかるけど、
たった 100 通りの足し算をマスターしたら、
どんな足し算も解ける。

少しだけの知識だけで、
どんな問題も解決できる。

そんな状態は、
数学の目指す究極のかたち
といえるかもしれない。

名前をつけたときも。
「いち」～「じゅう」だけでも
たくさんの数をつくることができた。

数字を並べるだけでいいなら

…読み方をあんまり考えなければ、
どんな数だって自由に作れて
名前を書いてあげることができる。

名前をつけるときも、
計算をするときも、
少しだけの知識をもとにして、
いつも決まった方法で対処できる。

「規則性」がある、
なんて言い方もできるね。

身の回りにはいろんな規則性があふれているけれど、
そういう規則性を見つけることが
数学の目標であって、目的なのだ。

掛け算.

こんな風に靴下があったとき.

J J J J J J J J

J J そろって「ひとつ」の靴下だと考えたら, 4 つ.

片足分 J だけでも「ひとつ」と考えたら, 8 つ.

この二つの考え方をつなぐのが, 掛け算.

2 が 4 つで 8.

2 かける 4 は 8.

さっき足し算の時にも言ったけど.

ただ単に数字で書いてだけでは,

2 かける 4 が 8 であることは分からないよ.

たとえば

2 かける 3 はいくつ?

と生まれて初めて聞かれた人は,

〇〇 〇〇 〇〇

を数えることによって,

ようやくそれが 6 であることを理解するわけで.

でも, 2 かける 3 が 6 になることは,

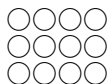
やっぱりたくさんの人が覚えてる.

何か呪文があったよね?

ににんがし. にさんがろく. さざんがく.

そう, 九九. くく.

みんなこの呪文を覚えているから,



こんな風にきれいに並んでいるときは、



3 かける 4 は 12.

そんな風に数える.

でも、



4 かける 3 は 12,

と考えてもいい.

ところで.

3 かける 4 は 12 の「意味」って

考えたことある？

いや、さっきのも確かに

3 かける 4 は 12 の意味なんだけどね？

3 かける 4 の意味は



こういうことで、

12 の意味は



こういうこと.

3かける4は12っていうのは,
このふたつが同じ数だ
という意味なんだけど.

3かける4がきれいに並んでいるのと比べて
12はなんだか, はみ出してる.
3かける4の方が
じつはずっときれい.

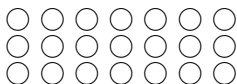
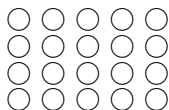
だから, 3かける4を12に計算する
というのは普通のことだけど,
実はすごく不自然なことをしてる.

○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ を ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ に
○ ○ ○ ○
並び替えているんだから.

でもね?
確かにきれいな並び方でこそ
なくなってしまうけど.
「じゅう」を基準にした書き方をすると,
ちゃんと得することがある.

たとえば, 4かける5と3かける7はどっちが大きい?

掛け算をいま生まれて初めて習った人が
数字だけを見たとしたら,
きっと答えはわからない.
掛け算の意味を考えなきゃ.



これを数えてみると、
確かに3かける7の方が大きいことがわかる。

ところで、この2つの数を
普通に数字を使って書いておくと、
20と21になる。

20という数字と、21という数字を比べると、
簡単にどちらの方が大きいかわかる。

だから、きれいな並び方を捨ててでも
「じゅう」を使った並び方、
「じゅう」を使った書き方にしてしまう。

でもね。
3かける4は、12よりもきれいな、
「同じものの名前」であることを忘れないでほしい。

数字だけを見ていたら、
そんなことは忘れてしまいそうだけれど。

さて。
九九そのものだけだと、
単純な掛け算しかできない。

たとえば、23かける13なんていうのは、覚えてない。

でも、足し算が、

たった 100 の足し算を覚えるだけで
どんなものでも計算できたように、
掛け算も九九がわかれば全部計算できる。

数字の掛け算.

数字を使って, 筆算で計算すれば,

23 かける 13 も計算できる.

実際にやってみよう.

23 かける 13 を筆算で計算したいときは,

やっぱり並べて書く.

$$\begin{array}{r} 23 \\ 13 \\ \hline \end{array}$$

まずは, 23 かける 3 を考える.

そして, 23 かける 3 を計算するときは

更に 23 を 20 と 3 に分けて考えるのだった.

$$\begin{array}{r} 23 \\ 13 \\ \hline 9 \end{array}$$

最初に 3 かける 3 をしてから, 次に

$$\begin{array}{r} 23 \\ 13 \\ \hline 69 \end{array}$$

20 かける 3 を計算して, 書けばよいのだった.

今度は, 同じ要領で 23 かける 10 を考える.

$$\begin{array}{r} 23 \\ 13 \\ \hline 69 \\ 3 \end{array}$$

3 かける 1 は 3 で,

$$\begin{array}{r} 23 \\ 13 \\ \hline 69 \\ 23 \end{array}$$

2 かける 1 は 2 だから, こう書く.

ひとつ左にずれているのは,

ほんとは 1 じゃなくて 10 だから.

つまり, 正しく書くと

$$\begin{array}{r} 23 \\ 13 \\ \hline 69 \\ 230 \end{array}$$

こういう意味だね.

あとは,

$$\begin{array}{r} 69 \\ 230 \\ \hline \end{array}$$

この二つの数を足してしまえば,

計算ができてしまう.

$$\begin{array}{r} 69 \\ 230 \\ \hline 299 \end{array}$$

299 が答え.

こんな風に,
九九と足し算さえわかっていれば,
どんな掛け算でも計算できてしまう.

九九の知識と, 足し算の知識だけで
すべてが分かってしまうというのは,
やっぱりすごいことなんじゃないかな.

一を聞いて十を知る
なんてレベルではないんだから.

イコール.

3かける4と12は、同じものの違う名前だった.
そういうときは、

3かける4=12

12=3かける4

どっちも、同じ数.

どっちも、同じことを表す.

7たす2=9

9=7たす2

こんな風に書いてもいいよね.

=という記号をつかうときは、
どっちも同じ.それが重要なこと.

だから、

人間=動物

なんてのは、まちがい.

よく言うけど、まちがい.

だってね？

人間は確かに動物かもしれないけれど、

動物のねこさんは人間じゃない.

一方通行のときは、イコールじゃないから、

人間≠動物.

≠は、イコールじゃないという意味.

ノットイコールなんて呼ばれる記号.

一方通行のときはね？
矢印にしてみえればいいの。

人間⇒動物。

ほら、なんとなく

人間は動物だけど
動物は人間とは限らない

そんな気持ちが伝わらない？
伝わらないかもしれないけれど、
伝わってほしい。

ほんとは、主語をつけてやって
僕は人間である⇒僕は動物である。
こんな風に書いたりする。

記号って、便利だけど難しいよね。
もし誤解があったら、おいてきぼりだから。

数学の世界では、
とてもたくさんの記号を使う。
最初は訳がわからないかもしれないけど、
慣れたらとても便利な記号たち。

だから絶対に記号を使え
とは言わないけど、
便利だから記号がある
ということを忘れないでほしい。

7 たす 2 = $7 + 2$ で

3 かける 4 = 3×4

いま, はじめて + と $\times$ を書いた.

やっぱり, 便利だね.

引き算.

○○○○○○○○から○○○を取り除くと、
○○○○ | ○○○だから、
○○○○になる。

$$7 - 3 = 4$$

$$4 = 7 - 3$$

それが引き算.

引き算をゆっくりやると、

○○○○○○○○

○○○○○○○ ○

○○○○○ ○○

○○○○ ○○○

こんな感じかな.

「ゆっくり」を記号をつかって書いたら、

$$7 - 3 = 7 - 1 - 1 - 1$$

だろうか.

$$7 - 1 = 6$$

$$6 - 1 = 5$$

$$5 - 1 = 4$$

こんな風に書いたほうがいいのか.

さて. 単純に考えると, 引き算は
大きい数から小さい数を引く
計算になる.

だって、○○○から○○○○○を取り除くことは
できないから。

それが、足し算や掛け算との大きな違い。

足し算でも掛け算でも、
適当に $562+219$ なんて書いてみたら、
確かにそういう数が存在した。

213×421 と書いたら、
たしかにそういう名前の数があった。

でも…。
 $2-5$ と書いてみても、
そういう名前の数は…ない？

ないのかな。

$2-5$ なんてどこにもいないのかな。

ちょっとひとこと.

数って何だったっけ？

えっと.

$\square\triangle\times$ と $\bigcirc\star\bullet$ に共通する何か.
だったかな？

そう.

数って, 共通の性質のことだった.

だからね？

$\square$ とか $\bigcirc$ では2-5を説明できなくても,
もし他の何かによって
それを説明できたとしたら,
2-5もそこに居たっていい.

ちょっと難しいかもしれない.

まあ, 気にせずに続きを読んでみて.

→と列と.

数の見方を, 今までとちょっと変えてみる.

数ってというのは, 並んでる.

1 の次は 2

2 の次は 3

3 の次は 4

4 の次は 5

...

あ, 0 も仲間に入れてあげて?

0 は 1 の前だね.

「なし」だから.

まあとにかく, たくさんたくさん並んでる.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...

なし	1	1	1	1	1					
し		+	+	+	+					
		1	1	1	1					
			+	+	+					
			1	1	1					
				+	+					
				1	1					
					+					
					1					

(略)

左にのぼして書いてもいいけど...

… 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

でも、なんとなく右の方が伸ばしやすいから、
右に伸ばして書いておく。

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 …

さて。

この図に、なんとなく矢印を書き入れてみる。

→ → → → → → → → → →
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 …

そうすると、たとえば3までには

→ → → →
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 …

3つの→があって、5までには

→ → → → →
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 …

5つの→がある。

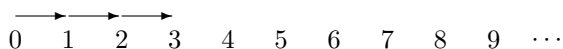
数字が書いてあるところまでには、
ちょうどその数字の数の→があるわけだ。

→と足し算.

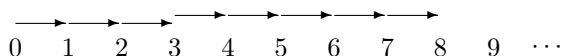
さっきの考え方を利用して、
足し算の意味を考えてみる.

たとえば, $3 + 5$ だったらね?

まず, 3 まで→を書いてみて,



それから, さらに 5 つ→を書き足してみる.



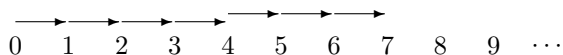
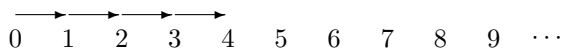
そしたら, 8 のところにたどり着いた.

そう, $3 + 5 = 8$.

これは, 3 の「あたま」に 5 の「おしり」をくっつけている,
と考えてもいい.

今度は $4 + 3$ だったら?

同じように考えたら,



$4 + 3 = 7$ が, きちんと成り立っている.

数を並べて書くとき、
足し算はこんな風に考えることができる。

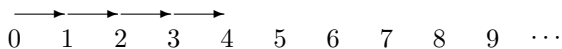
片方の「あたま」に、もう片方の「おしり」をそろえる。
→を使えば、そんな風に考えられる。

→と掛け算.

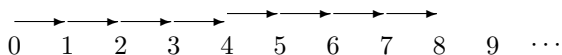
掛け算は, どうなるかというと.

4×2 だったら.

まずは, 4 まで→を書いてみる.



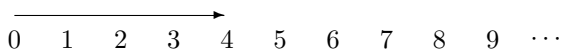
これが 2 つあったら 4×2 だから,



こういうことだ. $4 \times 2 = 8$.

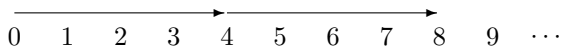
でも, ちょっと待って?

実は, もっとわかりやすく書ける.



じゃじゃん.

4 までの→を大きくしてしまえば,



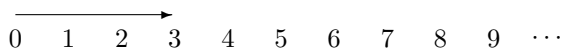
4 が 2 つある, ということがよくわかる.

まあ, 大した違いじゃないかもしれないけど….

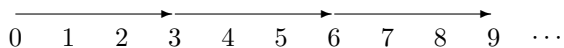
ではでは.

3×3 だったら？

最初に 3 までの大きな $\rightarrow$ を書いて、



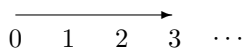
この $\rightarrow$ を 3 つにすればいい.



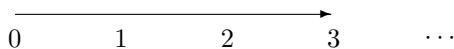
$3 \times 3 = 9$. ほら, できた.

$\rightarrow$ の大きさを取り替える感じだね.

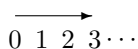
ところで.



こういう図があったとき,



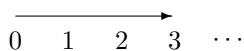
こんな風に書いても



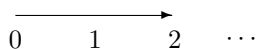
こう書いてみても,

どれも同じ意味をもっている.

でも,



と



だと、意味が違うよね.

さて、何が言いたいのかというと.

この図で大切なのは
 →の大きさ「だけ」でも、
 数字のあいだの広さ「だけ」でもなくて、
 お互いの関係なんだよ.

そういうことが言いたかった.

まあだから、この図はね.
 →と、
 並んだ数字という、
 二つの道具で数表現している
 とだけ覚えておいて.

どちらが欠けてもダメだから.

0が基準.

ところで.

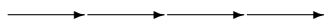
0 1 2 3 4 5 6 7 ...

この図について,
いま3と書いてあるところは
0から



だけ右に進んだところにある.
 $0 + 3 = 3$ だね.

同じように, 4と書いてあるところは
0から



だけ右に進んだところにある.
 $0 + 4 = 4$ ということ.

だから, すごく当たり前なんだけど,

0 1 2 3 4 5 6 7 ...

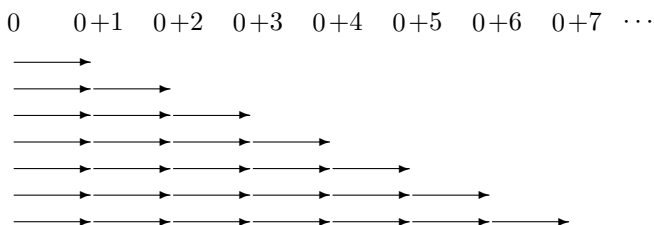
という図は

0 0+1 0+2 0+3 0+4 0+5 0+6 0+7 ...

なんて書けたりする.

わざわざ無駄な 0 を増やしただけで,
何の意味もないかな?

でも, 0 が基準なんだということを
少しだけ主張してみたつもり.



こんな気持ちで.

深い意味はなさそうに見えるけど,
この書き方には
ちょっと後でお世話になるから.

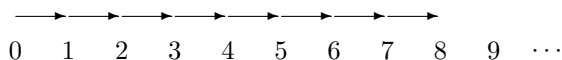
→と引き算.

さて.

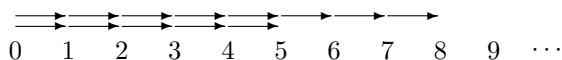
→と数字の列を使って考えると,
引き算ってどんな意味?

たとえば $8 - 5$ だったら.

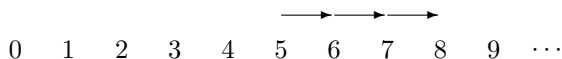
最初はやっぱり, 8 を書くところからはじまる.



今度は, おしりをそろえて 5 を書いてみる.



そうすると,

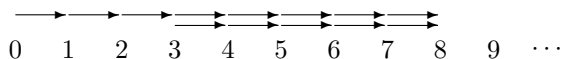


が残っていて, $8 - 5 = 3$ ということ.

実は, 引き算を表現するには

もうひとつの方法がある.

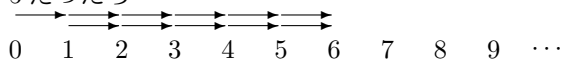
それは, おしりをそろえるんじゃなくて
頭をそろえる方法.



こうしてやると, ほら.

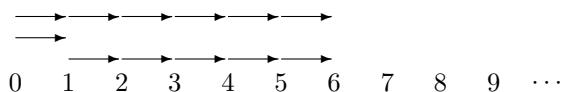
下の→のおしりが丁度 3 のところにくてる.

6 - 5 だったら…



6 - 5 = 1 だね.

これってじつは、
足し算と反対のことをしてる。
わかる？



上の→を隠したら, $1 + 5 = 6$.

次の→を隠したら, $6 - 5 = 1$.

なんとなく, ずらして書いてやると

$$1 + 5 = 6$$

$$6 - 5 = 1$$

こんなイメージ.

数字をそろえて書いてやると,

$$6 = 5 + 1$$

$$6 - 5 = 1$$

こんな風にも書ける.

同じことをしつこく.

$$6 = 1 + 5$$

$$6 - 5 = 1$$

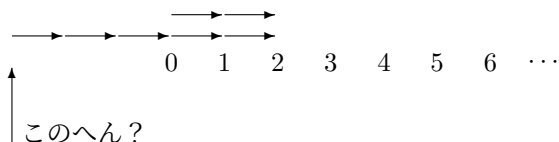
いろんな書き方があるんだね.

どの書き方でもいいけど,

足し算と引き算は

「逆」になってるって伝わったかな?

さて. じゃあ, $2 - 5$ は?



今までずっと,

ひっかかってたんだけど.

右にだけ伸びてるのって,

ちょっと変じゃない?

たしかに行き止まりの道もあるけど,

どっちにも伸びてるのが普通じゃない?

そうでもないかな.

でもね.

せっかくだから, 伸ばしてみようよ.

大きくなる方だけじゃなくて,

小さくなる方にも.

負の数.

さて.

0 1 2 3 4 ...

行き止まりの 0 から左に行ったところに,

新しい名前をつけてみる.

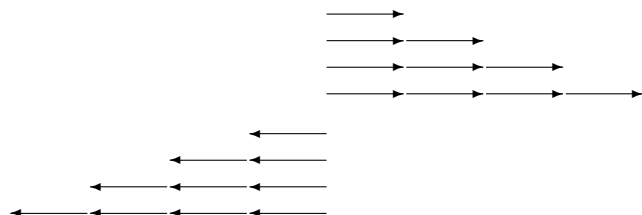
仮に, A, B, C, ... としよう.

... D C B A 0 1 2 3 4 ...

こんな感じ.

これってね.

... D C B A 0 1 2 3 4 ...



こういうことから,

ちょっと前の 0 を基準にした書き方にすると

... D C B A 0 1 2 3 4 ...

↓

... 0-4 0-3 0-2 0-1 0 0+1 0+2 0+3 0+4 ...

こんな風にかけるわけだ.

さらに, いちいち 0 を書くのは面倒だから

… -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 …

こんな風にしてみる.

今までの数は $+1, +2, +3, \dots$ と表現されて,
新しい数が $-1, -2, -3, \dots$ と表現されている.

-1 と書いて, 「マイナスいち」なんて読むのだった.
そう, 「負の数」だね.

負の数を考えてやると, $2 - 5$ だって.

… -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 …

$$2 - 5 = -3.$$

やっと $2 - 5$ の居場所がみつかった.

負の数は,

□とか○○とか△△△からは
なかなか考えることができない.

「物の个数」に「負の个数」なんてありえない.

でも,

→と列をセットにして考えたとき,
こんな風に負の数は意味を持つ.

大切なのは,

数には

それが意味をもつ場面と

意味を持たない場面がある
ということ.

負じゃない数だけが適切な場面があれば,
負の数も含めた数が適切な場面もある.

数って, いろんなものの性質のことだから.

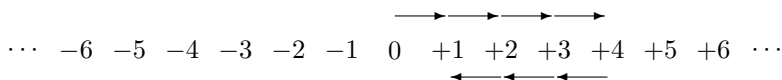
だから, $\rightarrow$ と数字の列だって,
数の性質を映し出している
鏡にすぎなくて.

堅い言葉では,
 $\rightarrow$ と数字の列は, 数を表現するひとつのモデルである
なんて言うけれど.

負の数の足し算.

さて, 負の数の話に戻って.
足し算について考えてみる.

$(+4) + (-3)$ はどうなる?



頭とおしりをそろえてやると, こうなる.

$(+4) + (-3) = (+1)$ ということ.

なぜさりげなく $()$ がついているのかというと,
 $+4 + -3$ って書くと何だか分かりにくいから.

$(+4) + (-3)$ を計算するときね.

-3 が $0 - 3$ を簡単にしたものだったことを思い出したら,

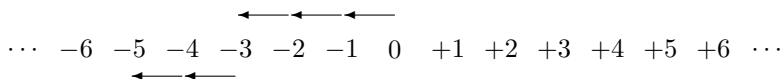
$$(0 + 4) + (0 - 3)$$

$$= 0 + 4 + 0 - 3$$

$$= 4 - 3 = 1$$

と考えてもいい.

$(-3) + (-2)$ だと?

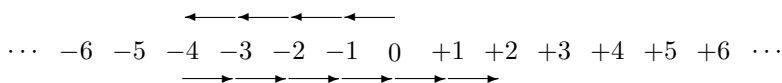


方向が今までと違うだけで, 簡単.

$(-3) + (-2) = (-5)$ だ.

数字の部分のを足して, $-$ にすればいい.

じゃあ, $(-4) + (+6)$ だったら?



こうなる.

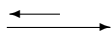
$$(-4) + (+6) = (+2).$$

簡単に計算するためには,
入れ替えて $(+6) + (-4)$ にしてやればいい.
そうすると, ただの引き算と一緒.

もし, 本当に入れ替えてもいいのか気になったら,



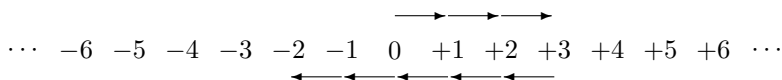
と



を見比べてみよう.

どちらも, 同じところからスタートしたら,
同じところにたどり着くから.

$(+3) + (-5)$ だと?



$3 - 5$ と一緒だね. $(+3) + (-5) = (-2)$.

いままでの話をまとめると.

$$(+1) + (+2)$$

$$(-1) + (-2)$$

みたいに同じ記号が頭についているものは,
記号をそのままにして, 数字だけ足したらいい.

$$(+1) + (+2) = (+3)$$

$$(-1) + (-2) = (-3)$$

ということ.

$$(-1) + (+2)$$

$$(+1) + (-2)$$

みたいに違う記号の足し算は,
数字が大きい方の記号を頭につけて,
引き算で数字を計算したらいい.

$$(-1) + (+2) = (+1)$$

$$(+1) + (-2) = (-1)$$

になるんだね.

このやり方さえわかれば,
 $(-943715) + (+322503)$ なんて式があっても大丈夫.

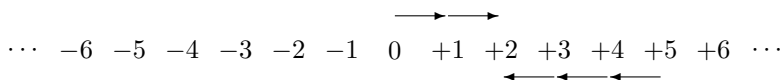
記号のつけ方を→で理解しておけば,
あとは数字を処理するだけで
普通に計算ができるから.

負の数の引き算.

じゃあ, 負の数の引き算はどうなるだろう.

$(+2) - (-3)$ は?

今度は, 頭と頭をそろえて書けば.

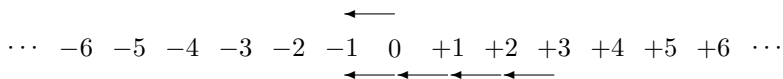


こういうこと.

$$(+2) - (-3) = (+5).$$

負の数の引き算って,
なんだか足し算みたい.

$(-1) - (-4)$ だったら?



$$(-1) - (-4) = (+3).$$

$(+4)$ を足してるのと一緒に.

だから, 負の数の引き算を計算しようと思ったら,
足し算に直せばできるよね.

負の数の掛け算.

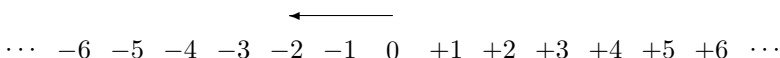
今度は掛け算だ.

$(-2) \times (+3)$ って, どうなる?

掛け算は, $\rightarrow$ を取りかえるようにして

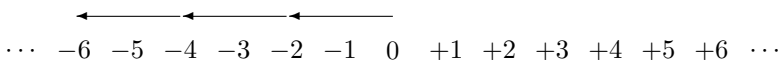
考えることができたんだった.

負の数でも, それを使う.



まず, -2 までの $\rightarrow$ を書いてみた.

次は, これを「いち」と考えて, 3つ進めてみる.



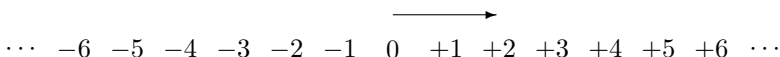
ということで,

$(-2) \times (+3) = (-6)$ になりましたとさ.

中身は 2×3 で, 方向はマイナスの方向.

じゃあ, $(+2) \times (-2)$ だったら?

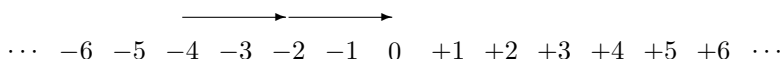
まず $+2$ を書いてみる.



さて. 今度は -2 を掛けるから,

→とは反対の方向に進まなきゃいけない.

だから, こいつは消してしまって



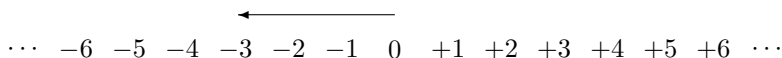
こうしなきゃいけない.

$(+2) \times (-2) = (-4)$ になった.

中身は 2×2 で, 方向はマイナスの方向.

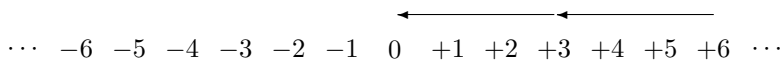
ではでは.

$(-3) \times (-2)$ は?



まず -3 を書いてみる.

-2 を掛けるから, 反対の方向に進む.



$(-3) \times (-2) = (+6)$.

中身は, やっぱり中身同士を掛けるだけ.

符号はというと,

マイナスにマイナスをかけるとプラスになるのだった.

負の数を含む掛け算の記号をまとめると

$$(+1) \times (+1) = (+1)$$

$$(-1) \times (+1) = (-1)$$

$$(+1) \times (-1) = (-1)$$

$$(-1) \times (-1) = (+1)$$

こういうことになるけど、
さっき見たように理由のあることなんだね。

中身はどうなるかというと、
ただ今までに知っている、
中身同士の掛け算をすればよいだけだった。

だから、+ と - の記号のつけ方さえ分かれば、
どんな掛け算でもできてしまうね。

あ、ところで。
今までは、わかりやすいように
(+4) とか (+5) なんて書いていたけれど、
次からは普通に 4 とか 5 なんて書くこともある。

負の数、たとえば (-9) も、
できる限り () は省略して -9 なんて書く。

$$-2 + 4 = 2 \quad 3 \times (-3) = -9$$

できる限りだから、
(-3) みたいに省略できないこともあるけど、
まあこんな感じ。よろしくね。

文字と規則性.

いろんな数で成り立つ規則がある.

たとえば,
正の数の引き算は負の数の足し算で計算できて,
負の数の引き算は正の数の足し算で計算できた.

それは, -1 でも, -2 でも,
 -65535 だって一緒.

$0 - (- \text{なんとか})$ はいつでも,
 $0 + \text{なんとか}$ になる.

「なんとか」が何であっても.

そんな規則を表現するために,
「文字」がある.

abc xyz

数学といえば, 文字.
みんな, 算数と数学の分かれ目は
文字だって思ってる.

文字にもいろんな役割があるけれど,
基本的には, 規則性を表現するための道具.

いま, 「なんとか」を使って式を書くと,
 $0 - (- \text{なんとか}) = 0 + \text{なんとか}$
こんな式ができる.

「なんとか」もひとつの文字だけど、
どうせ同じ文字を使うなら簡単な方がいい。

だから「なんとか」を x と書いて、

$$0 - (-x) = 0 + x$$

x が $0, 1, 2, 3, \dots$ のどれであっても、

$$0 - (-x) = 0 + x.$$

$0 - (-x) = 0 + x$ という式は、

そんな規則性を主張している。

そういう規則性があるんだと、ささやいている。

そのささやきを、聞いてあげて。

慣れたら難しいことではないから。

きっと慣れるから。

文字は、規則性を表現するための道具。

文字という記号を得たことで

数学はとても豊かになるのだった。

どんな風に豊かになるのかは、

ゆっくり見ていくことにする。

文字式.

文字の使い道って、どんなの？
ということで、次の問題を考えてみよう.

6本のペンがある. そのうち何本か取り除くと、
残っているペンの数は、ちょうど取り除いた数と一緒にだった.
何本取り除いたのだろうか？

その答えが x だとしたら、

$$6 - x = x$$

が成り立つことになる.

6本のペンから何本か取り除くと $6 - x$ で、
これが取り除いた数 x と等しいのだから.

$6 - x$ という記号の列も、

$6 - x = x$ という記号の列も、

x という文字自身も、

全部、文字が出てくる式だね.

こういう、文字が出てくる式のことを、
文字式というのだった.

中でも、

$6 - x = x$ は、 x が満たすべき性質、
規則性を表した式.

$6 - x$ だけだと、

「6 から x を引いたもの」

という意味しかないけど、

$6 - x = x$ だと、
「6 から x を引いたものは x と同じ」
という規則性が表現されているから。

こういう風に、 $=$ の含まれている
「規則性を表す文字式」のことを、
「方程式」なんて呼ぶ。

数学といえば文字というよりは、
数学といえば方程式なのかもしれない。

さて、話を戻して。
とりあえず方程式を作ってみたけれど、
こうやって記号で表現しただけでは
何もわからない。

これがもし、
 $a = 2 + 5$ とか
 $3 \times 3 = b$ みたいな形の式だったら、
よかったのにね。
 $a = 7$ で $b = 9$ 、
それぞれの値がはっきりと分かるのに。

でも、違うんだから仕方ない。
気を取り直して、 $6 - x = x$ の意味を考えてみる。

$6 - x = x$
この式の左側から、 x が消えてしまえばいいのに。

「…この式の左側から、 x が消えてしまえばいいのに。」

シンデレラは、泣きそうになりながらつぶやきました。
すると、魔女のおばあさんは言いました。

「この式の両側に、 x を足してごらん。
いいかい、両方ともに足すんだよ。」

シンデレラは、魔女の言うとおりにやってみることにしました。

$$6 - x = x$$

$$6 - x + x = x + x$$

え？

どうして $6 - x + x = x + x$ なのかって？

だってね。

同じものに x を足しても、
やっぱり同じものになるでしょう？

そうじゃなくて、
なんでいきなり x を足すのかって？

それはね。

$6 - x + x$ が、 6 だから。

x がいくつかは分からないけど、
引いて足したら消えるから。

だから $6 - x + x = x + x$ は、

$$6 = x + x$$

という意味をもつ.

もう答えは分かってしまったかもしれないけれど.

$x + x$ は $2 \times x$ だから,

$$6 = 2 \times x$$

ということになる.

つまり, x は二倍したら 6 になるような数.

そう, $x = 3$ ということ.

こんな風にして, 与えられた方程式を
 x が一目で分かるような形にすることを,
方程式を x について解く
なんて言ったりする.

$6 - x = x$ と, $x = 3$ は,

同じ x の持っている
規則性を表現しているけれど,
 x の分かりやすさが違うから.

だから, 一目で分かるように
方程式を解く, なんて話になる.

天下り.

ところで.

数学を勉強していると,

「どうしてそんなことをするの?」

ということに出会うことがある.

$$6 - x = x$$

この式をはじめてみた人が, いきなり

$$6 - x + x = x + x$$

なんてことをするとは, とても思えない.

それこそ, 魔女のおばあさんでもない限りは.

「どうしてそんなことをするの?」

それはね.

本当に, 本当に実もフタも無い話だけど,

「解けるからそんなことをするの.」

一番最初にそれを思いついた人は,

きっと偶然だったに違いない.

いろいろやって, いろいろ悩んで考えて,

考えた末に

$$6 - x + x = x + x$$

$$6 = 2 \times x$$

を思いついたに違いない.

でも、人間ひとりの人生なんて限られていて、
そうやって悩んで考えたことを
そっくりそのまま真似する時間はとてもない。

だから、何かを考えるとき、
もし前にそれを考えた人が親切だったら、
そこにはヒントが転がされていることもある。

あるんだけどね。

たまにヒントを転がすのが下手な
魔女のおばあさんもいて、
ヒントが「天から降ってくる」
こともある。

$6 - x + x = x + x$
なんて、
最初は天から降ってきたようにしか見えないから。

たまにはそんな「天下り」な話もあるけれど、
理想的には「天下り」がないほうがいい。
だから、なるべく「天下り」は減らしたつもり。

もちろん、ぼろぼろと
「天下り」なところもあるけれど。

ちなみに、魔女のおばあさんよりも
ちょっとだけ分かりやすく考えるなら。

だいぶ前に
「足し算と引き算が逆」と説明したときの、

… -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 …

こんな図を思い出すと、
確かにこれで x が消えることがわかる。

でも、「これを使う」ということは、
やっぱりそれを思いつかなきゃできない。

たとえハードルが少し低かったとしても。

だから、究極的に
「どうしてそんなことをするの？」
に答えようと思ったら、やっぱりそこには
「解けるからそんなことをするの。」
という答えが待っているのだった。

もちろん、
「天下り」を正当化しているわけじゃなくて、
できる限りの努力はするけどね。

割り算.

さっき, $6 = 2 \times x$ から $x = 3$ を求めたけど.
ほかにも同じような問題は考えることができて.

たとえば, $12 = 4 \times x$ だったら,
 x はどうやって求めたらいい?

何かそんな計算があったよね.
そう, 割り算.

8 個のみかんを 4 人にわけると,
1 人あたりは何個?

それが, 割り算.

8 を 4 つにわけると, 2 になる.

○○○○○○○○ → ○○ ○○ ○○ ○○

$$8 \div 4 = 2.$$

逆に 4 人がみかんを 2 個ずつ持ち寄ったとしたら,

○○ ○○ ○○ ○○ → ○○○○○○○○

$$2 \times 4 = 8.$$

引き算が足し算の反対なら,
割り算は掛け算の反対なのだった.

引き算の時に「逆」の式をたくさん書いたけど、

$$6 = x + x$$

$$6 - x = x$$

だったり、

$$8 = 4 \times 2$$

$$8 \div 4 = 2$$

だったり、

$$2 \times 4 = 8$$

$$8 \div 4 = 2$$

だったりする.

引き算には、「最初は」できない引き算があったように.
割り算にも、できない割り算がある.

たとえば, $7 \div 3$.

○○○○○○○ | | | |

○○○○ | ○ | ○ | ○ |

○ | ○○ | ○○ | ○○ |

ほら, 余っちゃった.

ぴったり分けてしまうことは, できない.

だから,

$$7 \div 3 \rightarrow 2 \cdots 1$$

なんて書く. こうやって書くとき,

$$7 \div 3 \rightarrow 2 \cdots 1$$

$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{商} & \text{余り} \end{array}$

そんな名前がついている.

普通はこれって = を使うけど,
 あえて = を使わずに $\rightarrow$ と書いたのは,
 = はなんとなく微妙だから.
 わかるよね, きっと.

$7 \div 3$ を商と余りに分けるのもいいけれど,
 もっとびったり割り切ってしまいたい.

だってね.

7本の鉛筆は三人でびったり
 分けられなかったとしても,
 7cmの紙切れは,
 三つ折りにすることができるから.

定規と割り算.

さっきまで、数を並べて書いていたけど.

$$8 = 2 \times 4$$

$$8 \div 4 = 2$$

これって、定規に似てるよね.

同じ幅で、たくさんの刻み.

だから

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

も定規に似てる.

端っこがないものに対して,

似てるというのも微妙かもしれないけど,

同じ幅で刻みがあるというところは一緒だから.

さて.

割り算を、さっきみたいにして

→と数字の列で考え直すと,

どうなるかというと.

じつは、定規を交換するのに似てる.

どういうことかって？

たとえば, $6 \div 2$ だったらね?

今までどおり, 6 の $\rightarrow$ を図に書き入れてみる.

$\cdots -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 \cdots$

0 の位置がずれているのは,
今回は $-$ の数は出てこないから.

さて, では次. 今の目盛りは,

$\cdots 0 \xrightarrow{\quad} +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 \cdots$

が $+1$ になるような目盛り

$\longrightarrow$

だけど, この目盛りを

$\cdots 0 \xrightarrow{\quad} +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 \cdots$

が $+1$ になるような目盛り

$\longrightarrow \longrightarrow$

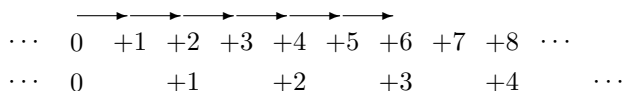
に取りかえてみる. そしたら,

$\cdots 0 \xrightarrow{\quad} +1 \quad +2 \quad +3 \quad +4 \quad \cdots$

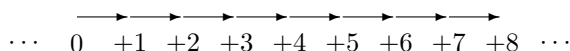
新しい目盛りで読むと $+3$ になっていて,
 $6 \div 2 = 3$ が答え.

こんな風に考える.

だから, $8 \div 4$ だったら...



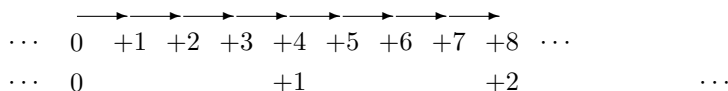
まず 8 までの $\rightarrow$ を書いて,



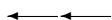
4 が +1 になるような目盛りを書いて,
 $8 \div 4 = 2$ となる.

これはちゃんと, 負の数でも使える.

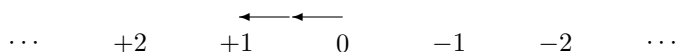
$6 \div (-2)$ だと?



を +1 とするような数字の列が, いつもと反対の



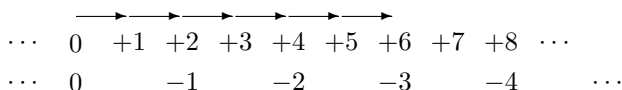
になることにさえ注意すれば,



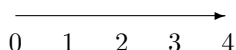
こんな風になる.

$$6 \div (-2) = -3.$$

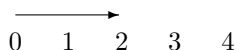
この方法をよく観察すると、
割り算が掛け算の逆であることも
見て取れたりする。



これの→の大きさを倍にすることの反対は、



こんな風に→を半分にすることだけどね。
じつは、

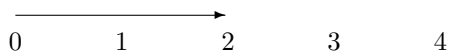


→の大きさを変える代わりに
数字の幅を広げても、同じ意味になる。

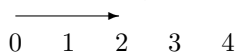
前に、→と数字がセットになって
数を表現してるって言ったよね？
そういうこと。

→を取りかえるのが掛け算なら、
数字の列を取りかえるのが割り算で、
この二つはちゃんと反対になっている。

同じことをしつこく.

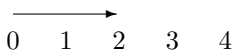


これで考えたら,



こういうことに, なっている.

→と「同じように」定規を取りかえたら,
打ち消しあって, 元のまま.

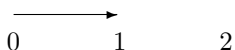
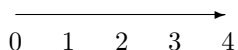


→を倍に

$$2 \times 2 = 4$$

定規を倍に

$$2 \div 2 = 1$$

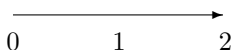


定規を倍に

$$4 \div 2 = 2$$

→を倍に

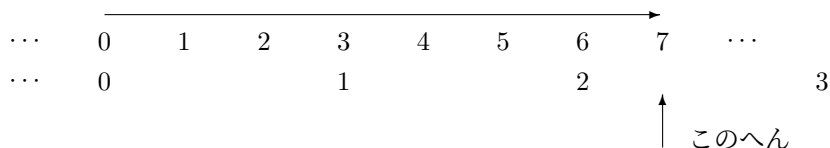
$$1 \times 2 = 2$$



分数.

さて.

これで $7 \div 3$ を考えたら, どうなる?



2 よりちょっと進んだところ.

3 にはまだ遠いかな.

そんなところ.

じゃあいっそ.

そこに $7 \div 3$ を作ってしまおう.

だからこれからは,

$7 \div 3$ を $\frac{7}{3}$ と書いて,

ひとつの数と考える.

今までと比べて

なんだか不自然な書き方にみえるけど,

書き方をちょこっと変えたただだよ.

だからほんとは,

こうやって書いた途端に

いきなり新しい数ができる,

なんて訳じゃない.

でも, $7 \div 3$ だと,

なんだか「もっと簡単にできそう」だから、
あえて新しい書き方をしてみたの。

そういうわけで、

$\frac{7}{3}$ なんて書き方をしなくても

$7 \div 3$ はひとつの数の名前だから。

$7 + 3$ や 7×3 が、

10 や 21 なんて書き方をしなくても、

ひとつの数の名前であるように。

まあとにかく、

$\frac{5}{2}$ とか $\frac{7}{3}$ とか、そういう数を

「分数」という。

$\frac{4}{1}$ とか $\frac{6}{3}$ は、

分数といえば分数だけど、

$4 \div 1 = 4$ だし $6 \div 3 = 2$ だから

あんまり重要じゃない。

まあでも、それがひとつの名前であることは
変わりがないけどね。

$1 + 1 = 2 = 2 \times 1 = \frac{2}{1}$

たとえば 2 には、たくさんの別名があるわけだ。

分数の大きさ比べ.

さて.

$7 \div 3$ を $\frac{7}{3}$ と書いてはみたけれど,
何もわかったつもりにならない.

たとえば,

$\frac{7}{3}$ と $\frac{5}{2}$ って, どっちが大きいの?

ただ名前をつけただけでと,
そんなことも分からない.

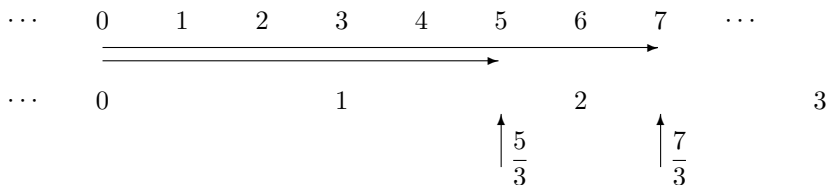
まあ, とりあえず.

簡単な問題から考える.

$\frac{7}{3}$ と $\frac{5}{3}$ って, どっちが大きい?

単純に考えたら, 7の方が5より大きいから,

$\frac{7}{3}$ の方が $\frac{5}{3}$ より大きい
と思ってしまう.

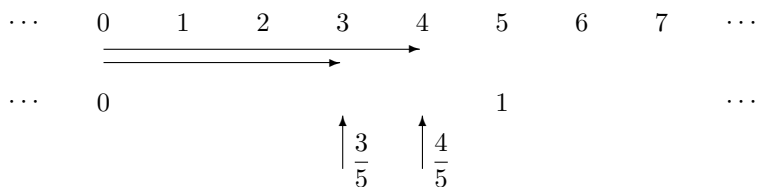


そう. 実際, それは正しい.

$$\frac{7}{3} > \frac{5}{3}$$

なんて書いたりする.

じゃあ、 $\frac{4}{5}$ と $\frac{3}{5}$ だと？



$\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$ だ.

分数の下側の数字が同じだったら、
上側の大小がそのまま通じる.

ちなみに、下側を分母、
上側を分子と呼ぶのだった.

じゃあ、 $\frac{2}{4}$ と $\frac{3}{4}$ だったら？

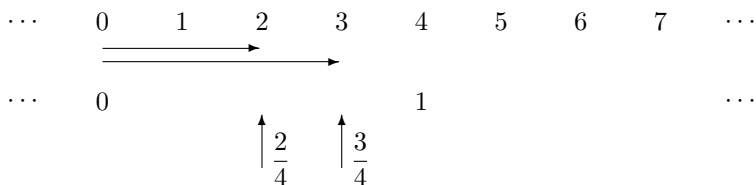
もう簡単.

図をかかなくても、

$$\frac{2}{4} < \frac{3}{4}$$

左右を入れ替えたら、 $\frac{3}{4} > \frac{2}{4}$

でも、あえて図をかいてみる.



この図をみたとき.

$\frac{2}{4}$ って,

0と1の丁度真ん中にあったりする.

半分のところ.

そう, $\frac{1}{2}$ だね.

じゃあ, $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ ということ?

そう. そういうこと.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ だから, $\frac{1}{2}$ と $\frac{3}{4}$ を比べるのは

$\frac{2}{4}$ と $\frac{3}{4}$ を比べるのと一緒.

$\frac{1}{2}$ と $\frac{3}{4}$ だとよく分からなくても,

別名の $\frac{2}{4}$ を使ってやれば,

比べてやることができるのだ.

と, いうことは.

違う分母の分数の大きさを比べたいときは,

それぞれの分母が同じになるような

別名を探してやればいい.

別名探し.

大きさを比べるために別名を探す,
なんて話になったけど.

たとえば, $\frac{3}{5}$ と $\frac{2}{3}$ だったら?

まず, $\frac{3}{5}$ の別名を探してみる.

$\frac{3}{5}$ って, $3 \div 5$ のことだ.

だから, 分母を変えるということは,
定規を取りかえることと一緒になる.

定規を取りかえることと対になっていたのは,
→を取りかえること.

目盛りの間の幅を長くすることと,
→を長くすることは,
ちょうど互いに反対になっていたのだった.

だから,
目盛りの幅を $5 + 5$ に増やしたときに,
→の長さを $3 + 3$ に増やしてやると,
やっぱり同じ数を表現してる.

$\frac{3}{5} = \frac{3+3}{5+5}$ なこと.

ほかにも, ね?

同じように考えたら,

$$\frac{3}{5} = \frac{3+3}{5+5} = \frac{3+3+3}{5+5+5}$$

ということ.

説明, 苦しいかな?

この式のほかの簡単な意味は, たとえば.

3g の塩を, 5 リットルの水にとかすときの味付けは,
(3 + 3)g の塩を (5 + 5) リットルの水にとかすときと同じだとか.
ちょっと薄い味付けだけど.

そんなわけで.

$$\frac{3}{5} = \frac{3+3}{5+5} = \frac{3+3+3}{5+5+5} = \frac{3+3+3+3}{5+5+5+5} = \dots$$

↓

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} = \dots$$

↓

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \dots$$

これが, $\frac{3}{5}$ の違う名前たち.

全部, 見かけは違うけど同じ数.

でも, 当然だけど,

この別名に分母が 3 のものはないね.

そもそも何をしてたのかというと,

$\frac{3}{5}$ と $\frac{2}{3}$ の大きさを比べたいんだった.

だから今度は, $\frac{2}{3}$ の「別名」も探してみる.

さっきと同じように,

$$\frac{2}{3} = \frac{2+2}{3+3} = \frac{2+2+2}{3+3+3} = \frac{2+2+2+2}{3+3+3+3} = \frac{2+2+2+2+2}{3+3+3+3+3} = \dots$$

↓

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5}$$

↓

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \dots$$

これを, さっきのと比べてみる.

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} = \dots$$

あ, 同じ 15 がでてくる.

同じ 15 のところで見比べると,

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{15} \text{ と } \frac{2}{3} = \frac{10}{15} \text{ だね. だから,}$$

$$\frac{3}{5} < \frac{2}{3} \text{ だといえる.}$$

こんな風に同じ分母の別名を探せば,
たしかに大きさは比べられる.

でも, 実はもっと簡単に,
分母の同じ別名を探す方法があった.

通分.

ところで.

いま, 同じ数の違う名前探しをしたけれど.

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} = \frac{3 \times 5}{5 \times 5} \cdots$$

この規則性を, 文字を使って書いてみる.

a を単純な数字で表される数として,

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times a}{5 \times a}$$

これが,

たったこれだけの式が,

上の規則性を表現する.

同じように,

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times b}{3 \times b}$$

文字をかえたのは,

a と b は一緒になくてもいいから.

この式を,

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times a}{5 \times a}, \quad \frac{b \times 2}{b \times 3} = \frac{2}{3}$$

こんな風に並べてみる.

もし,

a が 3 で b が 5 だったら

分母が同じものになるよね.

だから,

$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3}$ と表現してやって、

$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5}$ と表現してやる.

同じように、

$\frac{3}{7}$ と $\frac{1}{2}$ の大小は？

そう聞かれたときは、

$\frac{3 \times 2}{7 \times 2}$ と $\frac{1 \times 7}{2 \times 7}$ の大小を

比べてやればよくて、

$\frac{6}{14} < \frac{7}{14}$ だから

$\frac{3}{7} < \frac{1}{2}$ といえる.

二つの分数があるとき、

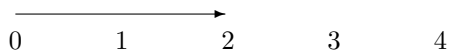
分母を同じ表現に変えてやることを

「通分」なんて呼ぶ.

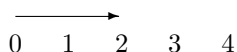
「共通の分母にする」から.

→と分数.

前に,



この図と

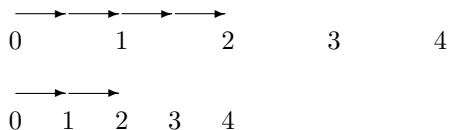


この図は同じ意味を持っている,
なんて話をした.

この2つの図の意味するところは,
実はさっきの「別名探し」と「同じ」だったりする.

どういうことかって?

この2つの図を,



こう書き直してみる.

この→は, 下の目盛りの幅に合わせてみた.

この幅を, 1 として考えよう.

下の図では, →の長さが2で, 目盛りの長さは1.
→を上にも, 目盛りを下にも書いているから, これを

$\frac{2}{1}$ なんて書いてみる.

これは, 実際に $\frac{2}{1}$ になっている.

同じように, 上の図を見てみる.

→の長さは4だけど,

目盛りの「幅」は下と比べると2倍になってて,
だから2と考えよう.

この図の表す数を, $\frac{4}{2}$ なんて書いてみる.

これもやっぱり, $\frac{4}{2}$ になっている.

→の長さを, 目盛りの幅で割るのと一緒だから.

こんな風に考えてみると,
分数みたいに「上下」に数を書くことも,
まあ自然なことだと思えるかも.

それはさておき.

この2つの図の表す数は, 同じものだった.

だから,

$\frac{4}{2} = \frac{2}{1}$ が成り立つ.

今考えたのは, 2倍する場合.

でも, →と目盛りを3倍したときでも,

4倍したときでも, 何倍したときでも,

やっぱり元の数と同じ数になる.

それは, まさしくさっきやったこと, なのだった.

数の種類.

ここで、今までに出てきた数について考えてみる.

まず, $1, 2, 3, 4, \dots$

この数たちは, 「自然数」と呼ばれる.

昔の人は,

「自然に」思いつくから「自然な」数,

という意味で名前をつけたに違いない.

でも, よく名前に引きずられてしまうけど,

自然数だけが「自然な」数だという訳ではない.

「一番簡単な数」とでも名付ければよかったのに.

さて, 次に 0 .

0 はよく自然数から除外されるけど,

人によっては 0 を自然数と呼ぶこともある.

だって, ちょっと見つけにくいだけだから.

実際, 数学者の中には 0 を自然数と扱う流派もあるけど,

学校では「 0 は自然数でない」と習うことになっている.

そして,

$-1, -2, -3, -4, \dots$

-1 から続く数たちは, 「負の整数」と呼ばれる.

「負の整数」は,

どうして自然数と区別されるのかというと,

〇〇〇〇の個数では実感しにくいから.

0 は、○が「ない」と考えたら
確かに見つかると考えてもいいけど、
-3 を○を使って見つけることはできない。

でも、「負の整数」は、 $\rightarrow$ と数字の列をつかってやれば、
ちゃんと見つけることができるのだった。

「負の整数」なんて表現は今まで使ったことがなかったけど、
「自然数」と0と-1, -2, -3, -4, ... は
全部合わせて「整数」と呼ばれていたりする。

だから、自然数でも0でもない「整数」が
「負の整数」と呼ばれている、というほうが正しい。

「負の整数」に対して、自然数のことを
「正の整数」と呼ぶこともある。
このときは、0 は正でも負でもない
特別な数として扱われることになる。

そして、「分数」。
「分数」は整数の割り算によって書けるような、
整数を含むたくさんの数のこと。

前に使った「 $\Rightarrow$ 」でこの関係を書くならば、
数 x が自然数 $\Rightarrow$ 数 x が整数 $\Rightarrow$ 数 x が分数
なんて書ける。

上の書き方では、右に行くほど、「増えて」いる。

ところで、さっき流派の話をちょっとしたけど。
ここで、流派によっては

分数は整数を含まないことを付け加えておく.

1 や 2 を, 分数とは呼びたくない人たちがいるわけだ.
その気持ちはよく分かる.

そういうときは, 分数を「有理数」と
言い換えてしまえばいい.
そのとき, 分数という言葉は
負の整数みたいな扱いになる.

整数以外の有理数.
そう, 「それ以外」という扱い.

数直線.

ところで.

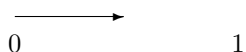
今まで整数で考えていたとき,
数と数の「間」には, 開きがあった.

0 と 1 の間には, 空白 があった.

断絶 ともいえるかもしれない.

でも, 分数によると,
0 と 1 の間には, いろんな数がある.

たとえば, $\frac{1}{2}$ は



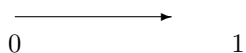
0 と 1 のちょうど真ん中.

$\frac{1}{2}$ は



0 から 1 にちょっと進んだところ.

$\frac{1}{3}$ は



まあ, 言葉で説明するのは微妙だけど.

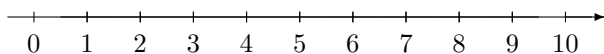
とにかく、いろんな数がある.

整数は飛び飛びだったけど、
分数は飛び飛びではないから.

だから、これから

… 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 …

を



と書くことにする.

「数直線」.

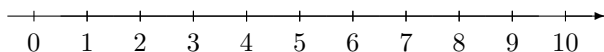
この直線は、そんな風に呼ばれてる.

そんな、直線.

今まで

… 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 …

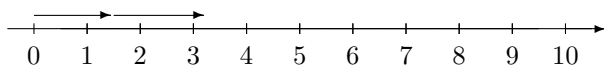
これと→を使って説明してきた整数の性質は、



これと→を使うと

そっくりそのまま分数の性質として説明できてしまう.

たとえば分数の足し算は、



こんな風になる, ということ.

でも, $\rightarrow$ の足し算だけだと.

どんな足し算をしたときも,

「見た目」しか分からない.

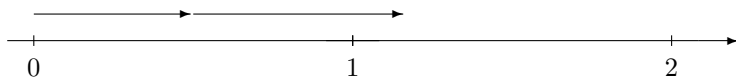
もっと「わかりやすく」知る方法は?

しばらく, そういう「計算」の方法を

見ていくことにする.

分数の足し算.

たとえば, $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ なら,

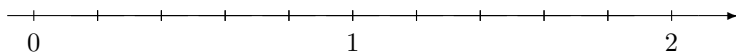


こんな感じで, たしかにそんな数はあるそう.
でも, もっと簡単な名前と呼べないだろうか?

もう少し簡単そうな問題から.

たとえば, $\frac{2}{5} + \frac{4}{5}$ なら?

数直線に, 少し細工をしてみる.

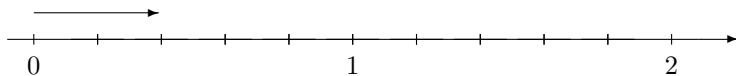


0 と 1 の間を, 5 つに分けてみた.

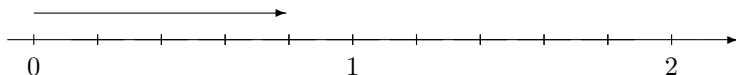
こうすると, ひとつのきざみが

$\frac{1}{5}$ を表している.

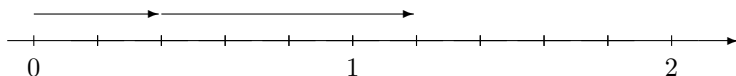
このとき, $\frac{2}{5}$ は



になって, $\frac{4}{5}$ は



になるから、足したら



$$\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5} \text{ といえる.}$$

分母が同じなら、分子を足すだけでいい.

だから、そこで通分が生きる.

最初の問題に戻って、

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \text{ はね?}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{2 \times 2}{3 \times 2}$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6}$$

$$= \frac{7}{6} \text{ ほらね.}$$

こんな風になる.

そうそう.

間違っても、

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{2+3} = \frac{3}{5}$$

なんてやっちゃいけない.

だって、分数は整数じゃないから、

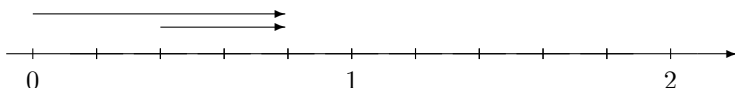
整数のときから「連想」される
適当な足し算をやってみても、
成り立つ保障はどこにもないんだから。

さっきの「正しいやり方」みたいに、
きちんと意味を考えてやらなきゃダメ。

同じ + の記号で表されているからといって、
勝手な連想ゲームはしてはいけないから。

まあとにかく、
これでどんな足し算でも計算できる。
それは、引き算でもおなじ。

たとえば $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}$ だったら、



$\frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$ となるわけだ。

だから $\frac{2}{5} - \frac{1}{2}$ だったら、

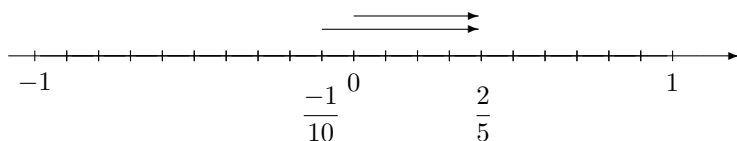
$$\frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{2 \times 2}{5 \times 2} - \frac{1 \times 5}{2 \times 5}$$

$$= \frac{4}{10} - \frac{5}{10}$$

$$= \frac{-1}{10} \text{ になる。}$$

いままでちゃんと紹介しなかったけど、

もちろん、負の分数だってあるわけだ。



こういうこと。

0 の位置をずらしたから、
さっきまでと雰囲気が違うかもしれないけど。

通分して計算する、という方法を使えば、
どんな分数の足し算や引き算でも、
別の分数に言い換えることができる。

どうせ同じ数を表現するのでも、
2つの分数で表現されてるよりは、
1つの分数で表現されてた方が
分かりやすいと思うから。

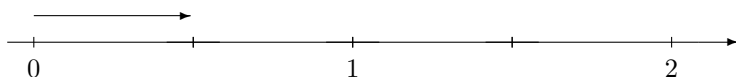
分数の掛け算.

じゃあ、掛け算はどうなるだろうか.

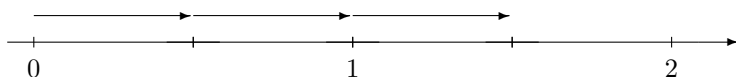
$$\frac{1}{2} \times 3 \text{ だったら?}$$

今までと同じように、 $\frac{1}{2}$ を

「いち」の→に取りかえて考える.



これが3つあったら、



こういうことだ.

これは3までの道のりの半分で、

$$\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2} \text{ になるね.}$$

もっといろんな数で考えたとき、

$\frac{1}{a} \times b$ みたいな形をしている掛け算は、

どんな自然数 a, b でも

$$\frac{1}{a} \times b = \frac{b}{a} \text{ になる.}$$

そういう規則で計算できる.

これは、ちょっと表現の仕方を変えたら、

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{3}{a}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{4}{a}$$

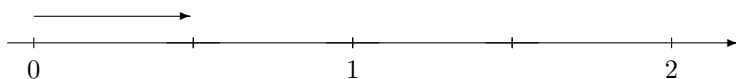
...

なんて意味がある.

当たり前の規則かもしれないけど.

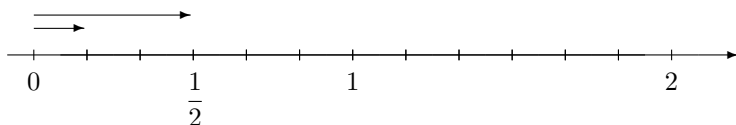
じゃあ, 掛け算の続きを.

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \text{ だったら?}$$



この $\frac{1}{2}$ を「いち」と考えたとき.

それを更に3つに分けると



こうなるから, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ だ.

2つに分けた後に

さらに3つに分けたら,

$2 \times 3 = 6$ 個に分かれるから.

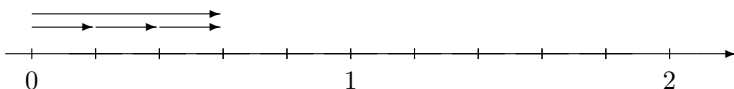
これも、もっといろんな数で。
分子が1のときは、
いつでも同じようなことが言える。

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{a \times b}$$

こういう規則があるわけだ。

じゃあ、 $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$ だったら？

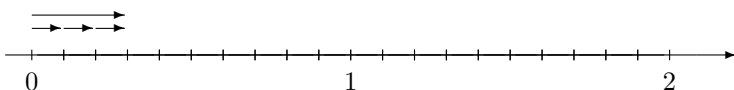
さっき、
 $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ と書ける、
なんて話をした。



こういうこと、 $\frac{1}{5}$ が3つある。

ということは、コレに $\frac{1}{2}$ をかけて $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$ にしたときは、

$\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$ が3つあると考えてもいいよね。



$\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$ だから、

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10} \times 3 = \frac{3}{10} \text{ だ.}$$

これは、 $\boxed{\frac{c}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{c}{a \times b}}$ とも書ける.

まったく同じことだけど、
さっきの計算を式を使って書くと.

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} &= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) \times \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

こんな風になる.

この考え方でてくる、

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \right)$$

この変形の仕方には、何やら名前がついている.

「分配法則」.

そんな名前だった.

分配法則.

分数の掛け算の途中だったけど、
ちょっとだけ脱線.

分配法則を文字で表現したら、

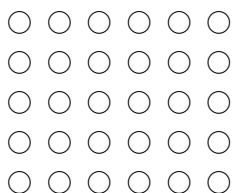
$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

$$c \times (a + b) = (c \times a) + (c \times b)$$

こういう式になる.

なんだか文字で書くと、
わかりにくい気がするかも.

でもたとえば、



こんな風に整列している人のことを考えたとき.

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 2 \\ \hline 12 \\ \times 3 \\ \hline 18 \end{array}$$

A diagram showing a multiplication problem using circles. The number 6 is written above a row of 6 circles. The number 2 is written to the left of a row of 6 circles. A horizontal line is drawn below the 2 row. Below the line is a row of 6 circles. The number 3 is written to the left of another row of 6 circles. Below this row is a final row of 6 circles.

こうやって線を入れてやると、
 $(2+3) \times 6 = (2 \times 6) + (3 \times 6)$ は、
 すごく普通のことだ。

これに、さらに縦に一本線を入れてみる。

	4		2	
	○	○	○	○
2	○	○	○	○
	○	○	○	○
3	○	○	○	○
	○	○	○	○

これは、
 $(2+3) \times (4+2) = (2 \times 4) + (2 \times 2) + (3 \times 4) + (3 \times 2)$
 という意味がある。

表みたいに書いたら、

	4	2
2	2×4	2×2
3	3×4	3×2

ということになる。

ところで。

もし、さっきの図に「できるだけたくさん」
 線を引いてみたら、どうなるだろう？

ちょっと意味が分からないかな？

	1	1	1	1	1	1
1	○	○	○	○	○	○
1	○	○	○	○	○	○
1	○	○	○	○	○	○
1	○	○	○	○	○	○
1	○	○	○	○	○	○

こうやって、全部の○を区切ってしまう。

こんな風になると、

$$(1+1+1+1+1) \times (1+1+1+1+1+1)$$

ということになるね。

さて、これを「展開」することを考えよう。

数式には、絶対に一列に書かなきゃいけない

なんてルールはないから、

さっきの表みたいにすると、

	1	1	1	1	1	1
1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1
1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1
1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1
1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1
1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1	1×1

こんな風になる。つまりは、

1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

これって、○と1を置き換えただけ。

○を「ひとつ」にしたら、

「全部」はこんな風になるんだということを、

$$(1 + 1 + 1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1)$$

という式が確かに表現してたりする。

だから、分配法則は、

掛け算と本質的な関わりを持っている。

また分数の掛け算.

また話は分数の掛け算へ.

$$\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} \text{ はどうなるの?}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

$$\text{だから, } \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \right) \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right)$$

と考える.

そうすると, さっきの○と1みたいに考えたら,

$$\begin{array}{ccc} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \times \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \times \frac{1}{5} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \times \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \times \frac{1}{5} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \times \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \times \frac{1}{5} \end{array}$$

$\frac{1}{7} \times \frac{1}{5}$ という塊が, 3×2 個できる.

$$\text{だから, } \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{7 \times 5}$$

$$= \frac{6}{35}$$

そう, 学校で習ったやり方になる.

$$\boxed{\frac{c}{a} \times \frac{d}{b} = \frac{c \times d}{a \times b}}$$

だね.

分数の割り算.

割り算はどうなるだろう.

$$2 \div \frac{1}{2} \text{ だったら.}$$

整数のときと同じように,

$\frac{1}{2}$ が 1 になっている

新しい目盛りを並べて考えてみる.



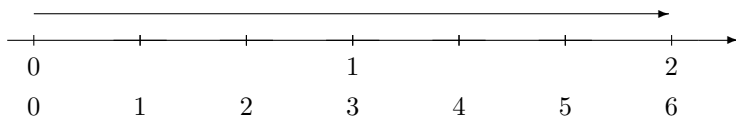
はじめの 1 は, 新しい目盛りでは 2 に対応してる.

同じように, もともと 2 だった→が

指し示している場所は, 4 だ.

$$2 \div \frac{1}{2} = 2 \times 2 = 4.$$

$$2 \div \frac{1}{3} \text{ だったら.}$$



いままでの 1 には, $\frac{1}{3}$ が 3 個ある.

だからいままでの 2 は, 新しい目盛りだと

$$2 \times 3 = 6 \text{ になる.}$$

掛け算のときに何度も考えたように、
いろんな数で成り立つ話をする。

どんな自然数 a, b についても、

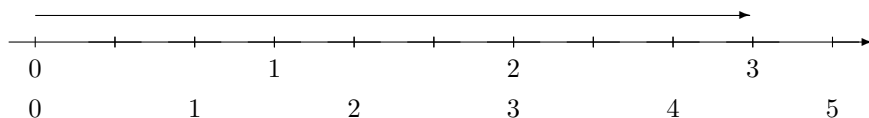
$a \div \frac{1}{b} = a \times b$

 が成り立つ。

割り算が掛け算に、はやがわり。

$3 \div \frac{2}{3}$ だったら？

$\frac{2}{3}$ を「ひとつ」の目盛りと考えると、



4と5の丁度まんなか。

$\frac{1}{2}$ が9個あるから、 $\frac{9}{2}$ だ。

どうして $\frac{9}{2}$ になるのか、

ちょっと考えてみる。

掛け算のときみたいに、

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2 \text{ と見てみる。}$$

そうすると、 $3 \div \left(\frac{1}{3} \times 2 \right)$ って、

まず3を $\frac{1}{3}$ で割ってから、

それをさらに2で割るのと一緒じゃないかな.

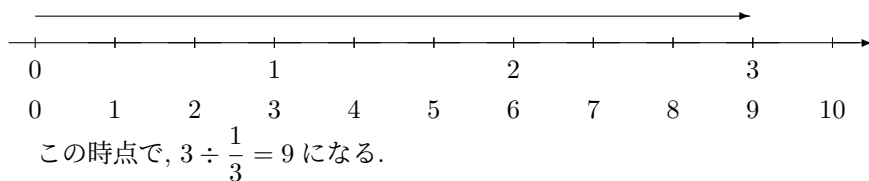
$$\left(3 \div \frac{1}{3}\right) \div 2 \text{ ということ.}$$

なんだかややこしい式だけど, 計算すると $\frac{9}{2}$ になって
たしかに一致してる.

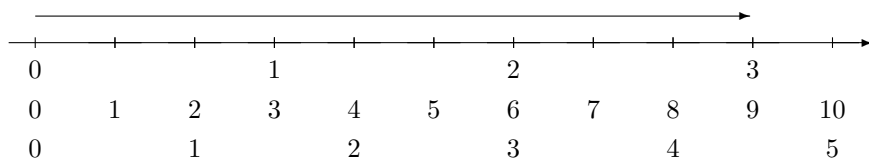
同じことをしつこくというか,
また目盛りを使って考え直してみる.

さっきは, いきなり $\frac{2}{3}$ の目盛りを使って考えたけど,

まずは「仮に」 $\frac{1}{3}$ の目盛りを使ってみる.

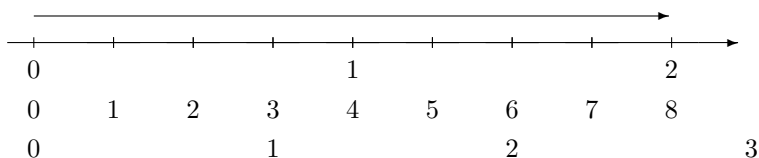


でも, 本当は $\frac{2}{3}$ の目盛りだから
2で割らなきゃいけないくて,



$$\left(3 \div \frac{1}{3}\right) \div 2 = \frac{9}{2} \text{ になるわけだ.}$$

$2 \div \frac{3}{4}$ だったら？



まず、 $\frac{1}{4}$ が 1 の目盛りで考えて、

ほんとは $\frac{3}{4}$ だから、3 で割って、

$$2 \div \frac{3}{4} = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}.$$

計算の仕方だけを考えると、
ちょうど「ひっくり返して掛ける」ことになってるね。

じゃあ、 $\frac{3}{2} \div \frac{4}{3}$ だったら？

もう図を描かなくても、

$\left(\frac{3}{2} \div \frac{1}{3}\right) \div 4$ になることを考えたら、

$$\frac{3}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{8} \text{ が答え.}$$

分数の割り算の規則性を
文字を使って表すとすれば、

$$\boxed{\frac{c}{a} \div \frac{d}{b} = \frac{c \times b}{a \times d}} \quad \text{ということだね.}$$

軽くまとめ.

分数の計算についてまとめると、
足し算と引き算は「通分してから分子同士の足し引き」
掛け算は「分子同士、分母同士それぞれ掛け算」
割り算は「ひっくり返して掛け算」
これで、計算できるのだった.

特に掛け算と割り算を繰り返すと、たとえば

$$\frac{3}{2} \times \frac{7}{5} = \frac{3 \times 7}{2 \times 5} = \frac{21}{10}$$

$$\frac{3}{2} \div \frac{7}{5} = \frac{3 \times 5}{2 \times 7} = \frac{15}{14}$$

こうなるのだった.

文字で書くと、

$$\frac{c}{a} \times \frac{d}{b} = \frac{c \times d}{a \times b}$$

$$\frac{c}{a} \div \frac{d}{b} = \frac{c \times b}{a \times d}$$

こうなったね.

割り算の書き方を少し変えると、

$$\frac{c}{a} \div \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \times \frac{b}{d}$$

まさに、「ひっくり返して掛ける」だ.

分数の分母と分子をひっくり返してできる数を
「逆数」なんて呼んで、

「割り算は逆数を掛ける」という言い方もあった.

逆算.

なんだか、少し不思議.
割り算が、掛け算になるなんて.

どうしてそんなことが起こるのかというと、
それは割り算が掛け算の逆、
「逆算」になっているから.

負の数の足し算のときにも、
正の数の引き算みたいに感じられたことがあったけど、
それと全く同じこと.

たとえばね？ 足し算と引き算では、
 $a - (-b) = a + b$
これはどんな a, b についても成り立つ関係だった.

これは、 $-b$ がもともと $0 - b$ だったことを考えると、

$$a - (0 - b) = a + 0 + b$$

ということだね.

ところで、掛け算と割り算では、

$$a \div \frac{1}{b} = a \times b$$

が成り立つのだった.

これは、 $\frac{1}{b} = 1 \div b$ だったことを考えたら、

$$a \div (1 \div b) = a \times 1 \times b$$

こんな風にも書ける.

並べてみると,

$$a - (0 - b) = a + 0 + b$$

$$a \div (1 \div b) = a \times 1 \times b$$

ほら, なんとなく似てない?

+ を × に

- を ÷ に

0 を 1 に

対応させたら, そっくりだ.

だから, 上で書いた式は,

互いに逆算になっているような計算の間に
成り立つ関係を表現してたりする.

ちょっとこの関係について, 考えてみよう.

記号だけで.

今から, 次の連分数の話に入るまでは
記号がたくさん出てくる.
だから, 最初は斜め読みでもいいんだけど.

さっき,

$$\frac{c}{a} \times \frac{d}{b} = \frac{c \times d}{a \times b}$$

$$\frac{c}{a} \div \frac{d}{b} = \frac{c \times b}{a \times d}$$

なんて書いた.

これって, 「横一列」で書いたら,

$$(c \div a) \times (d \div b) = (c \times d) \div (a \times b)$$

$$(c \div a) \div (d \div b) = (c \times b) \div (a \times d)$$

ということ. ややこしいけど.

この $\times$ を $+$ に, $\div$ を $-$ しても,
やっぱり成り立ったりする.

$$(c - a) + (d - b) = (c + d) - (a + b)$$

$$(c - a) - (d - b) = (c + b) - (a + d)$$

いまから,
実際に左側の式の形を変えたら,
確かに右側の式になることを
示してみる.

最初の式の左側 $(c - a) + (d - b)$ は足し算だから、
() を単純にはずしていい。

$$(c - a) + (d - b) = c - a + d - b$$

並び替えたら

$$= c + d - a - b$$

引き算と足し算をそれぞれまとめたら

$$= (c + d) - (a + b).$$

これで、最初の式が成り立つことが分かる。

次の式の左側を見てみると、
() の外が引き算になっている。

引き算のときに () を外すと

符号が反対になることに注意すると、

$$(c - a) - (d - b) = c - a - d + b$$

並び替えたら

$$= c + b - a - d$$

引き算と足し算をそれぞれまとめたら

$$= (c + b) - (a + d).$$

これで、二つ目の式も成り立つことが示せた。

いま、この式が成り立つことを説明するとき、
「+ と - の計算の順番を変えてもいい」 ことと、
「+ の () はそのまま外せるけど
- の () は + と - が入れ替わる」
ということの、たった二つの性質しか使わなかった。

この二つの性質は

$+$ を $\times$ にして $-$ を $\div$ にしても成り立つもの.

だから, 同じことをすれば,

上みたいな記号の操作だけでも

分数の掛け算や割り算の説明ができる.

でも, 記号の操作だけで

本当に納得できるかというと,

それはなかなか難しいけどね.

連分数.

ところで.

いままでに何度か $\frac{b}{a}$ と書いたけれど,
 a や b が分数だったら?

たとえば, $\frac{3}{\frac{1}{2}}$ とか,

$\frac{\frac{1}{3}}{3}$ とか.

こういうときは, 素直に

$3 \div \frac{1}{2}$ とか $\frac{1}{3} \div 3$ とか

こういう形にしたら計算できる.

けど, 別の考え方もある.

$\frac{3}{\frac{1}{2}}$ みたいなときには,

同じものをかけるという手もある.

通分の発想.

たとえば, $\frac{3}{\frac{1}{2}} = \frac{3 \times 2}{\frac{1}{2} \times 2} = \frac{6}{1} = 6$

という具合.

$\frac{\frac{1}{3}}{3}$ だと, $\frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{\frac{1}{3} \times 3}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$ となる.

こういうわけで, これから $\frac{b}{a}$ と書くときには,

場合によっては a や b は分数でもいい.

分数の分数でも、いい.

分数の分数は、「連分数」なんて呼ばれてる.

もちろん、いつもそうとは限らないけれど.

方程式.

さて.

分数の前は, どんなことを考えていたんだったか.

$$6 - x = x$$

そう, そんな話だった.

こういう問題のことを, 少し考えてみよう.

A さんには, 4 才年下の弟と 8 才年下の妹がいる.
弟と妹の年の合計は, A さんの年と一緒にになる.
A さんの年はいくつか?

さて.

A さんの年を, a と書いてみる.

どうして x じゃないのかって?

だって, 文字ならなんでもいいじゃない.

A さんだから, a にしてみたの.

まあとにかく, A さんの年を a としたら,

弟の年は $a - 4$ 才,

妹の年は $a - 8$ 才.

足したら,

$$(a - 4) + (a - 8) = a - 4 + a - 8$$

$$= a + a - 4 - 8$$

$$= 2 \times a - 12$$

いいかな?

足し算の順番を勝手に変えたり,

足し算を掛け算で表現したり、してるけど.

さて、これが a と同じになるんだから、

$$2 \times a - 12 = a$$

これが、 a の満たすべき規則を表す式.

でも、生まれてはじめてこの式を見た人は、
ここで手が止まってしまう.

$6 - x = x$ のときもそうだったけど、
上の式をじっと見ても、
 a が何かはよくわからない.

どうして分からないのかというと、
両方に文字があるから.

$131 \times 248 = y$ とか

$\frac{5}{7} + \frac{8}{11} = z$ だったら、

今までに考えたような計算をするだけでいいのに、

$$2 \times a - 12 = a$$

はよくわからないのだった.

だから、

$$2 \times a - 12 = a$$

と同じ意味の、

でも見た目は違う式を考えてみる.

「同じことの違う言い方」を、
探してみよう.

そこで、さっきの天下りの話がでてくる.

両側にある a を、「ひとつにまとめる」.

今はとりあえず、右側の a を「消して」みる.

a を消すためには a を引いたらいいから、

両方から a を引いて

$$2 \times a - 12 - a = a - a$$

$$a - 12 = 0$$

こうすると、もう分かってしまったけど、

一応 $a = \text{「なんとか」}$ の形まで持っていってみる.

-12 を消すためには 12 足せばいいから、

$$a - 12 + 12 = 0 + 12$$

$$a = 12$$

これで、 12 が答え

ということになる.

今は、「両方に 12 を足す」と考えたけどね.

逆であることを説明するときに、

たくさん書いた式みたいに

$$a - 12 = 0$$

$$a = 0 + 12$$

と考えてもいい.

これは、 12 という塊が

「移動」してるみたいで、

だから「移項」なんて呼ばれてる.

似た問題.

B さんには, 3 つ下の弟と 5 つ下の妹と 6 つ下のいとこがいる.
3 人の年の合計は, ちょうど B さんの年になる.
B さんは何歳か?

今度は, B さんの年を b とおく.

B だから b .

x っておきたくても, B だから b .

だって, 文字なんてどれでもいいから.

さて,

$$(b - 3) + (b - 5) + (b - 6) = b.$$

これは,

$$\begin{aligned} & (b - 3) \\ & + (b - 5) \\ & + (b - 6) = b \end{aligned}$$

こんな風に書いてもいい.

だって, どうせ数字は数字同士,

文字は文字同士足すんだから.

文字同士足す, というのは正確じゃないね.

文字がついているものは

文字がついているものでまとめる

というのが正しい言い方.

さて, これを計算したら,

$$3 \times b - 14 = b$$
 .

ここから先は同じように、
まず b をまとめてやる.

$$\begin{aligned}3 \times b - 14 &= b \\3 \times b - 14 - b &= 0 \\2 \times b - 14 &= 0\end{aligned}$$

それから 14 を移してやる.

$$\begin{aligned}2 \times b - 14 &= 0 \\2 \times b &= 14\end{aligned}$$

ここでも逆算の関係を利用して、

$$\begin{aligned}2 \times b &= 14 \\b &= 14 \div 2 = 7\end{aligned}$$

$b = 7$. これで、答えがでた.

最初は手がつけれなくてもね.
こんな風に式を作って
文字をまとめていくと、
ちゃんと答えにたどり着く.

もうひとつ同じような問題.

ある数を 3 倍して 2 を引くと、
もとの数に 5 を加えたものになった.
その数はいくつか？

今度は, c にしてみる.
文章の通りに式を作ると、

$$3 \times c - 2 = c + 5$$

今度は数字を先にまとめてみると、

$$3 \times c - 2 = c + 5$$

$$3 \times c = c + 5 + 2$$

$$3 \times c = c + 7$$

次に文字をまとめて、

$$3 \times c - c = 7$$

$$2 \times c = 7$$

$$c = 7 \div 2 = \frac{7}{2}$$

ということで、 $\frac{7}{2}$ が答え.

単純な数字だけを先にまとめてみても、
同じように解ける.

こういうタイプの問題は、
もう解き方がわかってしまったかもしれない.

$$\square \times x + \bigcirc = \blacksquare \times x + \bullet$$

みたいなやつは、

$$\square \times x = \blacksquare \times x + \bullet - \bigcirc$$

$$(\square - \blacksquare) \times x = \bullet - \bigcirc$$

$$x = (\bullet - \bigcirc) \div (\square - \blacksquare)$$

こういう決まった計算の仕方が、
規則性があるわけだ.

ところで、 $\square$ とか $\blacksquare$ とか $\bigcirc$ とか $\bullet$ とか、
普通の文字で書いてもいいよね？

まったく同じことだけど、

$$\begin{aligned}a \times x + b &= c \times x + d \\a \times x &= c \times x + d - b \\(a - c) \times x &= d - b \\x &= \frac{d - b}{a - c}\end{aligned}$$

普通の文字で書き直してみた.

少しわかりにくいかもしれないけど、

$$a \times x + b = c \times x + d$$

という式から、 x の値を求めると、いつでも

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

の右側の値になるということ.

規則的に.

こういう感じの計算式は、

「公式」なんて呼ばれたりする.

この場合は、

$a \times x + b = c \times x + d$ から x を求める公式.

また、規則性を表現するために、文字を使ったね.

省略と順序.

ところで.

$a \times x$ とか $c \times x$ とか,

x と $\times$ ってちょっとわかりにくい.

だから, $a \times x$ は ax と書いて,

$c \times x$ は cx と書くことにする.

一般に, たとえば $a \times b$ とかでも,

ab って書くことにする.

なんだか単語みたい.

あ, 数字はきちんと 2×3 って書くけどね.

でもね.

確かに $\times$ と x は紛らわしいけれども,

紛らわしいんだったら最初から x なんて使わなくていい.

そう考えたら, $\times$ を省略することには

深い意味がないようにも思える.

むしろ, $\times$ じゃなくて $+$ を省略したっていいのでは.

でも, なぜだか $\times$ を省略する決まりになっている.

どうして $+$ じゃなくて $\times$ を省略するの?

そんなバカバカしいこと,

あんまり考えたことないかもしれない.

でも, 考えてみたら変じゃない?

$a + b$ は $a + b$ で,

$a \times b$ は ab .

なぜ？

どうして？

どうして掛け算なの？

その理由は、ふつう

$a \times b + c \times d$

と書いてあったとき、これは

$(a \times b) + (c \times d)$

を意味するから.

$a \times b$ と $c \times d$ の方が先にくっついて、

それを後で足すから.

…でも、これって、

何の答えにもなってない.

だって.

$a \times b + c \times d$ は、

どうして $a \times b$ の次に $c \times d$ を計算するの？

$a \times b + c$ は、左から.

$a \times b + c \times d$ は、左からじゃない.

どうして、そんな不自然なルールを決めたの？

それはね.

分配法則があるから.

分配法則って覚えてる？

$$(a+b) \times (c+d)$$

$$= (a \times c) + (a \times d) + (b \times c) + (b \times d)$$

こんな規則のことだった.

	c	d
a	$a \times c$	$a \times d$
b	$b \times c$	$b \times d$

そう, このことね.

$(a \times c) + (a \times d) + (b \times c) + (b \times d)$
 この式にはたくさん $()$ が使われているけど,
 この $()$ を減らすために,

掛け算は足し算よりも先に計算する

というルールを作る.

$$(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

さらに $\times$ も省いて,

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

ほら, とても短くなった.

省略することのメリットは, それだけじゃない.

足し算って, 順番を変えても一緒だった.

$(a+b) + c = a + (b+c)$ とか,
 $a+b = b+a$ とか, ということ.

掛け算を先に計算するルールをつくって
× という記号を省いてしまったら、
足し算を計算するときに、
どこどこを交換してもいいか、すぐわかる。

たとえば、
 $a \times b + c + d$ だったら、
 $= c + (a \times b) + d$ なんですけど、
 ab をくっつけて書いておくと、
 $ab + c + d = c + ab + d$ でわかりやすい。

少し難しいかもしれないけれど。
要は分配法則があるから、
掛け算を先に計算して、
× は省略する。

まあね。
実は、そんなに難しいことを言わなくても、
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
って書くでしょ？

$\frac{1}{2}$ は $1 \div 2$ のことで、

$\frac{1}{3}$ は $1 \div 3$ のこと。

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ は、 $(1 \div 2) + (1 \div 3)$ のこと。

ほら、あまり気にしないうちに
() が省略されてた。

割り算は、掛け算の逆だね。
だから、分数を使って計算するんだったら、
掛け算の () も省略してやったほうが
なんとなくうまくいく。
そういうこと。
だって、分数はうまくいったんだもの。

ということで、
+ じゃなくて $\times$ を省略することにも、
きちんと理由があるのだった。

二次方程式.

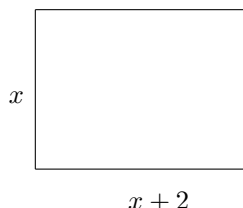
さて.

文字を使って, ちょっと新しい問題を考えてみる.

横の長さが, 縦の長さより 2 長い長方形がある.
この長方形の面積が 35 のとき, 縦の長さはいくらか.

長方形の面積は,
縦 $\times$ 横で計算できるのだった.
縦の長さを x としたら,
横の長さは $x + 2$ だから,

$$x(x + 2) = 35$$



これが, x の規則を表す式.

さあ, どうしよう.

$ax + b = cx + d$ は解けるようになって,

$x(x + 2) = 35$ は簡単には解けない.

だってね.

$ax + b = cx + d$ みたいに

x の文字が左右にあるわけでもないけど,

でもどうしたらいいか分からない.

試しに

$$x = \frac{35}{x + 2}$$

とかしてみても, 意味が分からないし….

こういう, どうしようもないときはね.

とりあえず「実験」してみよう.

もし, $x = 1$ だったら…

$$1 \times 3 = 3 \neq 35$$

だから, 違う.

もし, $x = 2$ だったら…

$$2 \times 4 = 8 \neq 35$$

やっぱり, 違う. 同じように,

$$3 \times 5 = 15 \quad \text{ブー}$$

$$4 \times 6 = 24 \quad \text{ブー}$$

$$5 \times 7 = 35 \quad \text{ピンポーン}$$

ということで, $x = 5$. おめでとう.

でも, 本当にこんな方法しかないの?

だって, なんかでたらめっぽい.

もっとカチッとわかりたい.

そう, 思わない?

思わないかな.

思ってほしい.

さて.

$$x(x+2) = 35$$

を, 少し変えてみる.

今度は, さっきみたいに

分数にするんじゃなくて,

() を開いて

$$xx + 2x = 35$$

なんて式にしてみる.

この式を, さらに少し変えて,

$$xx + 2x - 35 = 0$$

こんな形にしてみる.

これは, ただの気分転換なんだけどね.

こういう風に見ると,

xx $\cdots$ x が 2 つ

$2x$ $\cdots$ x が 1 つと数字

-35 $\cdots$ x が出てこなくて数字

あと $= 0$ がついてる

この式はそういう形をしている.

今までの方程式を見てみると,

x が 1 つのものと, 数字しか出てきてなかった.

$x1$ つのヤツと,

$x0$ コのヤツだけなら,

もう解けるのに.

でも, そこに $x2$ つのヤツ,

xx が入ると急に難しくなる.

こういう難敵には,

とりあえず名前をつけてみる.

x が2つのヤツが出てくるから、
「二次方程式」.
そしたら、今までの方程式は「一次方程式」になる.

さて.
今から「二次方程式」を「倒す」にあたって.

まずは、
「二次方程式」の中でも
ちょっとだけ簡単そうな、
 x 2つのヤツと数字だけの問題を
考えてみることにしよう.

登場人物が一人少なくなったら、
ちょっと楽そうだから.

まあ今の問題は、とりあえずおいといて.

はんぶんこ.

とりあえず, たくさん実験しながら
いろんな方程式を解いてみることにする.

二次方程式 $xx - 1 = 0$ の答えって, 何だろう?

かんたん, $x = 1$.

でもね.

ほんとは $x = 1$ だけじゃなくて,

$x = -1$ も答えになったりする.

だって, $(-1) \times (-1) = 1$ だから.

そういうとき, $x = 1, -1$ なんて書いたりする.

同じように,

$xx - 4 = 0$ だったら?

今度は $x = 2, -2$ が答え.

こんなとき, $x = \pm 2$ なんて書いてもいい.

ひとつの記号 $\pm$ で二つの数を表しているだけで,

そんなに深い意味はない.

$xx - 9 = 0$ だったら?

$x = 3, -3$.

同じことだけど, $x = \pm 3$.

$xx - \frac{1}{4} = 0$ だったら?

これはちょっと難しいかもしれないけれど,

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

がその答えになっている.

分数が答えのことだって, ある.

さて, では.

$$\underline{xx - 2 = 0 \text{ だったら?}}$$

x が 1 だと, $xx = 1$ だから, ちょっと足りない.

x が 2 だと, $xx = 4$ だから, あまりすぎ.

1 と 2 の間に, x のひとつがありそうな気がする.

…分数?

じゃあ, $x = \frac{b}{a}$ としてみよう.

ただし, a, b は自然数.

このとき, 式をちょっと変形させると,

$$\frac{b}{a} \times \frac{b}{a} - 2 = 0$$

$$\frac{b \times b}{a \times a} - 2 = 0$$

$$\frac{bb}{aa} = 2$$

$$bb = 2aa$$

こんな風になる.

文字が 2 つもあるけど,

そんなに変なことはしてないから,

ゆっくりついてきて.

さて.

$bb = 2aa$

を眺めても何も起こらないから、
ちょっと実験してみよう。

いま、 a がたとえば 3 だったとしたら。

そのときには、
 $bb = 2 \times 3 \times 3$
でなければいけない。

でもね？
 $2 \times 3 \times 3$ を、
きれいに 2 つに分けることはできない。

ん？ちょっと意味不明かな。
どういうことかというと。

たとえば $2 \times 3 \times 2 \times 3$ だったら、
 $(2 \times 3) \times (2 \times 3)$ と考えて、
同じもの 2 つに分けられる。
 $2 \times 3 = b$ を意識してるつもり。

$3 \times 5 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7$
だったら、
 $(3 \times 5 \times 7) \times (3 \times 5 \times 7)$
にできる。
もしこういう風になったら、
 $3 \times 5 \times 7 = b$ になるわけだ。

でもね。
同じように $2 \times 3 \times 3$ を
ぴったり 2 つに分けようとしても、

きれいに分けられない.

これば, 別に3じゃなくても,
たとえば5で考えても同じ.

だって, 一番最初に出てくる2が,
ひとつだけ, のけものになってしまっているから.

どんな自然数 a を持ってきたとしても,
 $2aa$
をきれいに2つに分けるのは無理.
だから, $bb = 2aa$ を満たす a, b なんて, ない.

つまり, $xx - 2 = 0$ を満たす x は
分数にはない, ということ.

もし最初に出てくるのが2じゃなくて
たとえば4だったら,
 $4 = 2 \times 2$ に分けることができ
大丈夫なんだけどね.

2は4みたいに
掛け算の形で分けて書けないから.

それは困った. うーん.

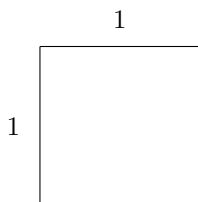
ないのかな.

$xx - 2 = 0$ を満たす x なんて, ないのかな.

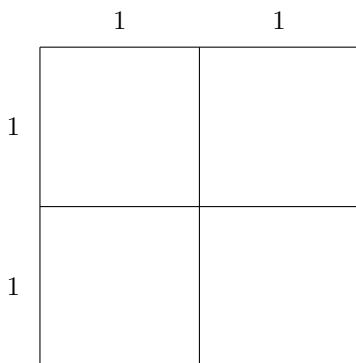
$\sqrt{}$.

$xx - 2 = 0$ を満たす数って、
本当にないんだろうか？

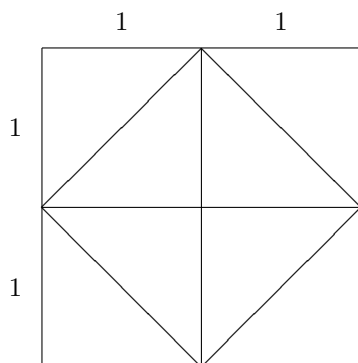
ここで、突然だけど.



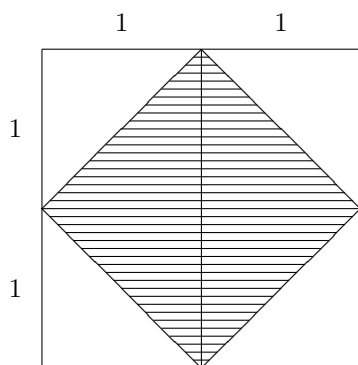
こんな正方形のパネルを, 4 枚用意する.
そして, ならべる.



大きい正方形ができた.
こいつに, ...

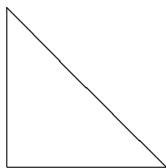


斜めの線を引いてみた.

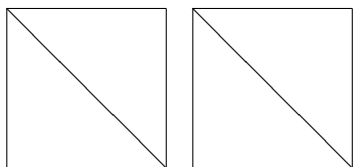


こうすると, 大きい□の中に
少し小さい◇が入っているように見える.

◇の面積は,



このパネル 4 枚分だから、



こういうことになって、面積 2.
ところで、この◇は正方形だったりする.
だから、あの斜めの長さを x としたら、
 $xx = 2$
にならなければならない。つまりは、

$$xx = 2$$

ということだ。

おおっと。困った。
もし x が「ない」と考えたら、
この斜めの長さは
なかったことになる。
だから、 x という数は「ある」気がする。

でも、 x が分数じゃないことも
分かってる。

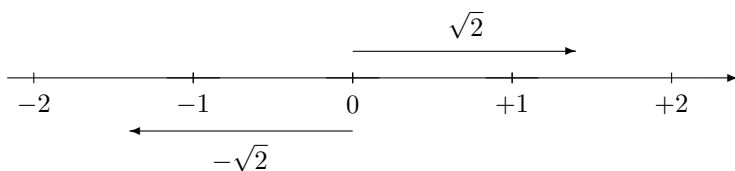
だから、今度も新しくつくる。そろそろおなじみ。

$xx = 2$ のとき, $x = \sqrt{2}$ と書く.
つまり, $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ ということ.

おっと.

$xx = 1$ の答えは 2 つあったから,
 $xx = 2$ の答えも 2 つありそうだ.

だから, 1 と 2 の間にある
正の数を $\sqrt{2}$ にして,
-1 と -2 の間にある
負の数を $-\sqrt{2}$ にしとく.



そういうルールを今決めた.

分数でも, まだ足りなかった.
そんな数を表す方法が, $\sqrt{\quad}$.

ところで. 同じように考えたら,

$xx = 3$ のとき

$x = \sqrt{3}, -\sqrt{3}$ つまり $x = \pm\sqrt{3}$

なんだけれども.

こんな風に書き換えてみても,
まだあんまり意味がない.

それは、 $1 \div 2$ を $\frac{1}{2}$ と書いてみたり、
 $0 - 3$ を -3 と書いたときと一緒に。
新しい書き方をしてみたところで、
ただそれだけだと、深い意味はない。

深い意味はないけど、まあとりあえず、
 $xx = a$ の形の問題は、
 $x = \pm\sqrt{a}$
と表現できるようになった。

ところで、今までずっと
 xx と書いてきたけれど、
 $xx = x^2$
こんな書き方を知っているかもしれない。
 x の 2 乗. x を 2 つ掛け合わせること。

これがもし、たとえば x を 4 つ掛け合わせたものだったら
 x^4 なんて風にかけるわけだ。

掛け算が、足し算の繰り返しの
 $a + a + \cdots + a$ によって
決まっていたように、
 $a \times a \times \cdots a$
によって新しい計算を決めることができる。

この新しい計算、 a^b は
「べき乗」なんて呼ばれるのだった。

さて。
 xx 改め x^2 の出てくる方程式について、

もう一度考えてみよう.

カボチャの馬車.

突然.

ほんとに突然だけど.

$(x+1)(x+1) = 9$ を解けていわれたら、どうする？

この方程式は,

$$(x+1)^2 = 9$$

と書き直してもいいけど.

もし、これが

$$x^2 = 9$$

だったら、 $x = \pm\sqrt{9}$ で、 $3 \times 3 = 9$ を思い出せば、

$$x = \pm 3$$

ということになる.

だから、

$$(x+1)^2 = 9$$

だったら、

$$x+1 = \pm\sqrt{9}$$

なんてかけてしまうのではないだろうか？

$x+1 = \pm\sqrt{9}$ は、

$x+1 = \pm 3$ もしくは $x+1 = 3, -3$ だから、

計算すると $x = -4, 2$ ということ.

これを $(x+1)^2 = 9$ と照らし合わせてみると、

たしかに $(2+1)^2 = 9$ だし、

$(-4+1)^2 = 9$ になっている.

だから,

もし $(x + \bigcirc)(x + \bigcirc) = \square$ とか,

$$(x + \bigcirc)^2 = \square$$

なんて形で書かれていたら,

$$x + \bigcirc = \pm \sqrt{\square}$$

と変形できる.

さて.

ここで, $(x + 1)^2 = 25$ を,

解かずに変形してみる.

この式の左側を見ると,

$$(x + 1)(x + 1) = xx + x + x + 1$$

$$= x^2 + 2x + 1 \text{ だから,}$$

$$(x + 1)^2 = 9 \text{ は}$$

$$x^2 + 2x + 1 = 9 \quad \text{と同じ意味で, つまり}$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \quad \text{ということ.}$$

	x	1
x	$x \times x$	$x \times 1$
1	$1 \times x$	1×1

あれ?

これはまさに, さっき解こうとしていた問題と
同じ形をしている.

ということは.

もし,

$$x^2 + bx + c = 0$$

と同じ意味の,

$$(x + \bigcirc)^2 = \square$$

みたいな式があったとしたら,

答えが分かるのではないだろうか.

これからしばらく記号がたくさん出てくるから,
慣れるまではともしんどいけど,
ちょっとがんばってね.

さて, $\bigcirc$ と $\square$ を普通の文字で書いてみる.
たとえば $\bigcirc$ を e とすれば,

$(x + \bigcirc)^2 = (x + e)^2$	x	e	
$(x + e)^2 = x^2 + ex + xe + e^2$	x	$x \times x$	$x \times e$
$= x^2 + 2ex + e^2$	e	$e \times x$	$e \times e$

これが $\square$ と等しいのだった.
 $\square$ を f とかけば,

$$x^2 + 2ex + e^2 = f$$
$$x^2 + 2ex + e^2 - f = 0$$

こんな風になっていると, 都合がいい.
これを $x^2 + bx + c = 0$ と見比べてみる.

$$x^2 + 2ex + e^2 - f = 0$$
$$x^2 + bx + c = 0$$

x がついているもの同士を見比べると,
 $b = 2e$ だったらうまくいきそう…?

$$b = 2e \text{ つまり } e = \frac{b}{2} \text{ だったら,}$$

$$(x + e)^2 = x^2 + 2ex + e^2$$
$$(x + e)^2 = x^2 + bx + e^2$$
$$(x + e)^2 - e^2 = x^2 + bx$$

こういうことだね.

だから $x^2 + bx + c = 0$ は,

$$\begin{aligned}(x + e)^2 - e^2 + c &= 0 \\ (x + e)^2 &= e^2 - c\end{aligned}$$

ようやく、最初の形に持ってきた.

$(x + \bigcirc)^2 = \square$ にしてやるという信念の下,
式を変えていくところになった.

さらに、 $\sqrt{\quad}$ を使って解こうとすると,

$$\begin{aligned}(x + e)^2 &= e^2 - c \\ x + e &= \pm \sqrt{e^2 - c} \\ x &= -e \pm \sqrt{e^2 - c}\end{aligned}$$

こうなるけど,

$e = \frac{b}{2}$ であることを思い出せば,

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

こんな式になる.

パチパチパチ.

長い格闘の末,

ようやく答えらしきものにたどりついた.

$x =$ なんとか, というかたち.

と言われても,

なんだか、文字のお化けみたいで

そんな実感は全くないかもしれないけど.

解の公式.

さっき,

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

なんて式を作った.

この式を,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \text{ とか,}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ なんて書くと,}$$

見覚えのある人もいるかもしれない.

もちろん, 初めて見る人もいるだろうけど.

なんだか, なにやら難しい式だけどね.

たとえば, さっきの $x^2 + 2x - 35 = 0$ だったら.

$$b = 2, c = -35 \text{ だから, } x = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 35}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{36}$$

$$x = -1 \pm 6$$

$$x = 5, -7$$

ほら, ちゃんと 5 が出てきた.

この

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

は, どんな式にも使える.

どんな $x^2 + bx + c = 0$ でも、
 x の満たすべき規則性を表現した式が、これ。

この式は、 $x^2 + bx + c = 0$ の
「解の公式」なんて呼ばれていたりする。

もう少し「実験」してみよう。
実験というのは、
自分で答えがわかっている問題を作って
本当にそれが成り立っているか試してみる、ということ。

たとえば。
 $4 \times 6 = 24$ だ。
これを利用して、問題を作ってみよう。

4 を x と考えると、 $6 = x + 2$ だ。
だから、 $4 \times 6 = 24$ は
 $x(x + 2) = 24$ と書ける。
式を変形して、

$$\underline{x^2 + 2x - 24 = 0}$$

これを解いたとき、
 $x = 4$ が答えに出てくれば、大丈夫だ。

$$x = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 24}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{25}$$

$$x = -1 \pm 5$$

$$x = 4, -6$$

ほら、できた。

じゃあ、今度は $4 \times 7 = 28$ で問題を作ってみる.

$7 = 4 + 3$ だから,

$$4(4 + 3) = 28$$

$$x(x + 3) = 28$$

$$x^2 + 3x - 28 = 0$$

これで、 $x = 4$ は出るだろうか？

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 28}$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 28}$$

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4}}$$

$$\text{うう. } \sqrt{\frac{121}{4}}.$$

何このバケモノ.

$$\sqrt{\frac{121}{4}} \cdots \text{って.}$$

$$\text{まあとにかく, } x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4}} \quad \cdots ?$$

…ここは、少しカンニングをしてみよう.

今は、答えから問題を作ったから、

$$-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{121}{4}}$$

が 4 になるとうれしい.

だから,

$$4 = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{121}{4}} \text{ としてしまうと,}$$

$$4 + \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{121}{4}}$$

$$\frac{11}{2} = \sqrt{\frac{121}{4}}$$

こうなったら, うれしいわけだ.

実は, ほんとに $\frac{121}{4} = \frac{11}{2} \times \frac{11}{2}$ だったりする.

まあでも, 本当はカンニングなんてできなくて,
だから $\sqrt{\quad}$ を使って答えを書いても
本当に万能な訳では, ない.

もうすこし√.

だいたい、 $\sqrt{2}$ って書いてみても、

$\frac{7}{5}$ より大きいのか小さいのかも

よくわからなかったりする.

$\sqrt{2}$ と $\frac{7}{5}$ の大小って、どうやって比べたらいい？

それは、2 乗してみたらわかる.

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ だけど

$$\frac{7}{5} \times \frac{7}{5} = \frac{49}{25} = \frac{25 + 24}{25} < 2$$

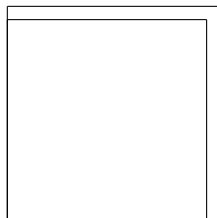
$\frac{7}{5} \times \frac{7}{5}$ は、わずかに、 $\frac{1}{25}$ だけ、

2 よりも小さい.

だから、 $\frac{7}{5}$ の方が $\sqrt{2}$ より小さい.

$$\frac{7}{5} < \sqrt{2}.$$

OK かな？



面積で考えたら、面積が広いほうが一辺の長さが長い.

そういうはなし.

もちろん、2 乗して考えてよいのは、

両方ともが正の数だから、だけどね.

まあ、こうやったら確かに大きさが比べられる.

けど、こんな不自由な $\sqrt{\quad}$ に、

いったい何の価値があるのだろう.

その1つの答え…じゃないけどね.

$\sqrt{\quad}$ は不自由でも仕方ない.

だってね. もともと,

今までの数にはなかったものを,

ありそうだからという理由で作ったんだから,

今までのルールが使えなくても仕方ない.

ちょっと昔のことを思い出してみて？

たとえば自然数だったら,

足し算は絶対増えるし引き算は絶対減るけど,

負の数だったらそうじゃない.

自然数だったら,

掛け算は絶対増えるし割り算は絶対減るけど,

分数だったらそうじゃない.

分数は, 足し算や引き算を計算するときは,

「そのまま」じゃなくて通分しないとダメだった.

「 $\rightarrow$ を足す」という意味はいっしょだったけど,

数字的にはちょっと複雑.

だから, 新しい数には

今までの規則や計算の仕方が

成り立たないこともある.

でも, 不便だからって見捨てちゃいけない.

もう1つ, $\sqrt{\quad}$ を使う意味は,

「妥協」が少なくてすむ

ということ.

今まで, いろんな計算のカベに突き当たるごとに
新しい数を作ってきたけれど.

そうやって新しい数を作ってきたのは,

「妥協」と言えるかもしれない.

「妥協」がイマイチだったら,

「あきらめ」と言い換えてもいい.

$0 - 3$ をあきらめて -3 を,

$1 \div 7$ をあきらめて $\frac{1}{7}$ を.

こうしてやることで,

$1 - 4$ は -3 の別名になって,

$2 \div 14$ は $\frac{1}{7}$ の別名になった.

$\sqrt{\quad}$ も同じようなもので,

$\sqrt{\quad}$ を使うことを許したら,

「妥協」が少なくてすむ.

うーん. 難しいかな.

えっとね.

$\sqrt{2}$ は,

$x^2 - 2 = 0$ または $x^2 = 2$

を「あきらめ」たことで, 生まれたのだった.

じゃあ, $x^2 + 2x - 1 = 0$ は, どうだろう?

こういうときは,

$x^2 + 2x - 1 = 0$ そのものは、
あきらめなくていい。

だって、 $x^2 + 2x - 1 = 0$ は、

$$\begin{aligned}(x+1)^2 - 2 &= 0 \\ (x+1)^2 &= 2 \\ x+1 &= \pm\sqrt{2} \\ x &= -1 \pm \sqrt{2}\end{aligned}$$

こんな風に「解けて」、
「半分のあきらめ」ですむ。

これは、 $1-4$ が -3 の別名だったり、
 $2 \div 14$ が $\frac{1}{7}$ の別名だったりするのと、
ちょっと似てる。

まあ、 $-1 + \sqrt{2}$ とか、
 $-1 - \sqrt{2}$ とかは
それ以上簡単にできないけれど…

でもとにかく！

$\sqrt{\quad}$ ，つまり $x^2 = c$ を「あきらめ」たら、
 $x^2 + bx + c = 0$ のすべてを「あきらめ」なくてもすむ。
そんなところに、 $\sqrt{\quad}$ を使う別の意味がある。

むずかしい？

かもしれない。

わからなかったら、とりあえず先に進めばいいけど、
改めてゆっくりと考えてみてほしい。

代数的数.

さて.

いま, $x^2 + bx + c = 0$ は, $\sqrt{\quad}$ を使ったりして

「解けた」のだけれど,

こいつにはもっと難しそうな仲間がたくさんいる.

たとえば, $x^3 + 7x^2 + 3x + 1 = 0$ とか.

二次方程式よりももっと「強そう」な

三次方程式とか, 四次方程式とか,

こいつらを「解く」のはちょっと難しそう.

でも, そんな方程式の解となるような数も,

$\sqrt{\quad}$ みたいに

考えてもよいかもしれない.

一般に, $\sim$ 次方程式のことを,

「代数方程式」なんて言ったりする.

だいすうほうていしき.

「数の代わりの」文字が使われているから, 「代数」.

でね.

「代数方程式」の「答え」になるような数のことを,

「代数的数」なんて呼んだりする.

もう少し正確にいうと.

たとえば $ax^3 + bx^2 + cx + d$ の a, b, c, d は

それぞれ x^3 の係数, x^2 の係数, x の係数, 定数項,

なんてよばれるけれど,

係数がすべて分数の代数方程式の解が,

代数的数ということになる.

だから、正しくは

「分数係数の代数方程式の解になる数が代数的数」

なんだけど、まあでも標語的に

「代数方程式の解になる数が代数的数」

と呼んでもいい。たぶん。

さて。

a を分数としたら、

$\sqrt{a}$ は代数的数になる。

$\sqrt{a}$ は、 $x^2 - a = 0$ のひとつの解だから。

ときに。

$\sqrt{\quad}$ って。

負の数や分数と比べると、

なんか複雑な決め方をしているように見える。

でも、

実は $\sqrt{\quad}$ の作り方も、

負の数や分数と同じようなものだったりする。

どういうことかというと。

負の数は引き算ができないから作った。

これは、足し算の逆ができないから作った、ということ。

$$x + 5 = 2$$

を満たす x がないから、 $2 - 5$ を作った。

分数は割り算ができないから作った。

これは、掛け算の逆ができないから作った、ということ。

$$x \times 7 = 2$$

を満たす x がないから, $\frac{2}{7}$ を作った.

じゃあ, ルートはどうだろう?

ルートは…べき乗の逆ができないから作ったの.

$$x^2 = 3$$

を満たす x がないから, $\sqrt{3}$ を作った.

べき乗の 2 だけちょっと小さいから
わかりにくいかもしれないけど,
やってることは実は同じ.

ところで.

2 乗の逆は $\sqrt{\quad}$ を使って書けばよいけれど.

3 乗の逆や 4 乗の逆はどうしたらいいんだろう?

そういうときは, 同じ記号を生かしてみる.

たとえば, $x^3 = 2$ のときには,

$$x = \sqrt[3]{2}$$

なんて書いてみる.

$x^5 = 7$ のときには,

$$x = \sqrt[5]{7}$$

こう書く.

むしろ, 「普通の」 $x = \sqrt{3}$ も,

$x = \sqrt[2]{3}$ なんて書いてみる.

こうしてやると、なんとなくだけれど、
べき乗の「逆」という気がする。

こうやって、 $\sqrt{\quad}$ を用いて
 $\sqrt[n]{a}$ みたいに表される数のことを、
「べき根」なんて呼ぶ。

前に、 $\sqrt{\quad}$ は
「妥協」が少なくてすむ
なんて言ったけれど。

これは少し言い方を変えると、

どんな $x^2 + bx + c = 0$ の解も、べき根によって表現される

ということ。

まあ、 $\sqrt{\quad}$ を使って書いても、
いきなり何かがわかる、
という訳じゃないけどね。

$x^n = a$ という代数方程式があったとき、
 $x = \sqrt[n]{a}$ はその解の一つだから、
べき根は代数的数の表現の仕方では
簡単なものに分類される。

さて。

じゃあ、一般に

どんな代数的数もべき根で書けるだろうか？

詳しくは説明しないけど、
実は、無理なことが分かっていたりする。

つまり、一般の代数方程式の解を表現するためには
べき根よりも更なる妥協をしなければならない
ということ。

それは、
解が数として存在しないなんて意味じゃなくて、
べき根では表現できないという意味。
代数的数という範囲では、
ちゃんと解はそこにある。

もし詳しく知りたかったら、
アーベルとかガロアとか、
そんな名前の人たちについて調べるとよいかもしれない。

偶然、どちらも若くして亡くなった、
今の数学に多大な影響を与えた人たち。

さて。
今まで、自然数、整数、分数、べき根、代数的数、と
たくさんの数を作ってきた。
でも、一番「身近」な数たちの説明をしていない。

「小数」と「実数」。

小数.

小数のアイデアは、とってもかんたん.

1
10
100
1000
10000
...

数字を「左にのぼす」ことで、
新しい自然数がいくらでも生まれるのだった.
1つ0が増えるごとに、
大きさは10倍になる.

だから、1より小さい数を
数字で書きたいと思ったら、
「右にのぼす」ことにする.

このとき、さっきと反対に
大きさを10ずつ小さくしていけばいい.

1
01
001
0001
00001
...

こういうこと.
でも、ただ数字が並んでいるだけだと
普通の整数と区別がつかなくなるから、

基準の位置を点 . で表すことにして,

1	1
0.1	10
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10000
...	...

点を除けば, きれいに左右対称になっている.

こんな風に,
ひとつずれたら 10 変わる
という関係を保って作られた数が, 小数.
一番身近な小数に対して,
ややこしい説明だったかも.

さて.

1.1 は $1 + \frac{1}{10}$ のことで,

11.35 は, $10 + 1 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100}$ のことだから,

小数というのは,

1, 10, 100, ... と, $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \dots$ を基準にして
表現する方法, とも言える.

$\dots, 100, 10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \dots$

と書いたほうが, よいのかもかもしれない.

小数の長所と短所.

小数は,
自然数と同じで数字がただ横に並んでいるだけだから,
自然数と同じようにいろんなことができる.

たとえば, $2.34 + 1.12$ は,
 $234 + 112$ を計算して,
点をつけてやるだけでいい.

他の計算も, 同じようなもの.
だから, 小数はよく使われる.
計算が自然数並みに簡単だから.

でもね?
小数にも, いくつか問題がある.

小数というのは,
 $\frac{243}{100}$ とか,
 $\frac{3421}{1000}$ とか,
 $\frac{58976}{10000}$ とか,
 $\frac{\text{なんとか}}{10 \cdots 0}$
みたいな形の分数しか扱うことができない.

たとえば,
 $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} = \frac{5}{10}$ だから
0.5 とかけるし,

$$\frac{1}{5} = \frac{1 \times 2}{5 \times 2} = \frac{2}{10} \text{ だから}$$

0.2 とかけるし、

$$\frac{3}{25} = \frac{3 \times 4}{25 \times 4} = \frac{12}{100} \text{ だから}$$

0.12 とかける．けど、

$\frac{1}{3}$ を小数で書こうとしてみよう．

$$\frac{1}{3} = \frac{\text{なんとか}}{10 \cdots 0}$$

になったら、小数で書ける．

いつもどおり、「なんとか」を x で書いて、

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{10 \cdots 0}.$$

ただし、 x は自然数．

これは、両辺を $10 \cdots 0$ 倍すると、

$$\frac{10 \cdots 0}{3} = x$$

になる．

この $10 \cdots 0$ って

なんか謎かもしれないけど、

10 とか 100 とか 1000 とか、

そういう 0 が何個か続いている数を表してる気持ちで、

$10 \cdots 0$ なんて書いてみた．

わかりにくいかな．

じゃあ、一つ一つ考えてみよう．

まず, $\frac{10}{3} = x$.

$\frac{10}{3}$ って, $10 \div 3$ だった.

でも, $10 \div 3$ って 3 余り 1 で,

$10 \div 3$ って 割り切れない.

だから, このときは式が成り立たないことになる.

だって, x が自然数だったときの話だから.

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \text{残りの小さい数}.$$

じゃあ, 今度は 100 だとどうだろう.

$$100 \div 3 = x?$$

100 を 3 で割ろうとすると, 1 あまる.

だから, $\frac{1}{3}$ の分母を

きれいに 100 にすることはできない.

$$100 = 99 + 1$$

$$= 33 \times 3 + 1 \text{ だから,}$$

3 で割ると 1 あまる.

$$\frac{1}{3} = \frac{33}{100} + \text{残りの小さい数}.$$

じゃあ, 1000 $\div$ 3 だと?

$$1000 = 999 + 1$$

$$= 333 \times 3 + 1$$

やっぱり, 1 あまる.

$$\frac{1}{3} = \frac{333}{1000} + \text{残りの小さい数.}$$

10000 も, 100000 も,
 どれだけ 0 を増やしても,
 やっぱ 3 で割ると 1 あまる.

9, 99, 999, ...

9 が並んだ数は全部 3 で割り切れるから,

10, 100, 1000, ... は

3 で割ったら必ず 1 あまる.

ということは...

$\frac{1}{3}$ は小数では書けない

ということだ.

それって, 不便だね.

ほんとに不便?

ほんとに?

だって, 0.3333333333

とか使ってみたらどうなのさ?

これは, 3 倍したら

0.9999999999 になる.

確かに 1 にこそならないけれど,

$\frac{1}{3}$ のそっくりさんとしては

十分使えるんじゃない?

うん.

確かに, 日常的にはそれで十分かもしれない.

0.3333333333

なんて, ほとんど $\frac{1}{3}$ みたいなものだから.

でも… でもね?

0.3333333333 は,

$\frac{1}{3}$ そのものじゃない.

やっぱり気になる.

どうしても $\frac{1}{3}$ を小数みたいにしたい.

普通的小数にできないことは, わかったけど.

無理やり.

$\frac{1}{3}$ は, どうやっても小数では書けないのだった.

でも, $\frac{1}{3}$ を小数っぽく書きたい.

じゃあ, どうするか.

0.333 とか

0.33333 みたいに,

どこかで3の数字がとぎれてしまうと,

もうそれは $\frac{1}{3}$ じゃない.

だから, どこまでも続いている

という気持ちを込めて,

0.333...

と書く.

0.333...3 じゃないよ.

0.333... なのだ.

だって, 0.333...3 だと,

どこかで終わってるみたい.

さっきの $10\cdots0$ と一緒.

だから, 終わらないように,

0.333...

としておく.

この書き方は, よく問題になる.

いつまでも終わらないってどういうこと?

とかね.

今, どんな風にして

$0.333\cdots$

という書き方を考えたのか, ちょっと思い出そう.

もともと, $\frac{1}{3}$ は小数で書けなかった.

0.3 は違うし, 0.33 も違うし,

0.3333333333 でも,

3 を増やしたら確かに近い数にはなるけど,

でもとにかくどうしても $\frac{1}{3}$ が書けなかった.

だから, 今までの書き方じゃ書けないから,

しぶしぶあきらめて,

新しい $0.333\cdots$ という書き方をつくった.

この $\cdots$ は, あくまでも気持ちであって,

気持ちでしかない.

そこに 3 がたくさんあるというよりは,

無理やり小数にしようとして何ケタ計算しても,

0.3333333333 みたいになるよ,

ということを表現してるだけ.

だから, $0.333\cdots$ という書き方は

たまに少し不思議な問題を生むけど,

$0.333\cdots = \frac{1}{3}$ っていうのは

もともと無かった記号を無理やり作ったようなもの.

それを忘れちゃいけない.

と言いつつ、
この「無理やり」な書き方が「正しい」ことは、
じきにわかる。

….

さっき $\frac{1}{3}$ について考えたけど、

普通の小数では、 $\frac{1}{3}$ はうまく表せないのだった。

でも、「無理やり」表せば、

$\frac{1}{3}$ は小数みたいにはなるのだった。

$\sqrt{2}$ は分数じゃないから、

分数の一部しか表せない小数では、

普通には表せない。

じゃあ、 $\sqrt{2}$ を「無理やり」小数にしたらどうなる？

さっき $0.333\cdots$ という結論にたどり着く前は、

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \text{残りの小さい数}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{33}{100} + \text{残りの小さい数}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{333}{1000} + \text{残りの小さい数}$$

なんてことをやった。

これって、

0.3

0.33

0.333

…

↓

$0.333\cdots$

1 ケタずつ考えていったのと、同じ。

だから、 $\sqrt{2}$ でも、1 ケタずつ考えてみる。
いくよ？

$$1 \times 1 = 1$$

$$2 \times 2 = 4$$

だから、 $\sqrt{2}$ は 1 と 2 のあいだ。

$$1.1 \times 1.1 = 1.21 \quad \text{電卓でも計算してね。}$$

$$1.2 \times 1.2 = 1.44$$

$$1.3 \times 1.3 = 1.69$$

$$1.4 \times 1.4 = 1.96 \quad \text{あ、だいぶ近い。}$$

$$1.5 \times 1.5 = 2.25 \quad \text{あ、行き過ぎた。}$$

ということで、1.4 と 1.5 のあいだ。

同じように…

$$1.41 \times 1.41 = 1.9881$$

$$1.42 \times 1.42 = 2.0164$$

だから、1.41 と 1.42 のあいだ。

ちょっと時間はかかるけど、

こんな風にやっていけば

1 ケタずつは分かる。

さて。

$\frac{1}{3}$ に近い小数を探すと、

ずっと同じ数字 3 が続いていた。

だから、 $0.333\cdots$ なんてかけた.

$\sqrt{2}$ の場合はどうなるんだろう？

1 ケタずつ考えたら、いつか同じ数字が続くんだろうか？

そういうときは、
逆に考えてみる.

$1.41333\cdots$ とか、
 $1.414111\cdots$ とか、
こんな小数が、はたして
いくつになるのかを考えてみる.

いや、「いくつになるのか」は、
そんなに問題じゃない.
 $\sqrt{2}$ は分数じゃないから、
まずは分数じゃない数になるかどうかを確かめてみる.

$1.41333\cdots$
 $= 1.41 + 0.00333\cdots$ だし、
 $1.414111\cdots$
 $= 1.414 + 0.000111\cdots$ だ.

だから、最初のほうはなんかバラバラで、
「後ろの方」は規則的な、
というか同じ数字が続くときは、

$1.41 + 0.00333\cdots$

みたいに、不規則的なところと
同じ数字の部分にわけられる.

まずは 1.41333... から考えてみよう.

1.41 は分数で書ける. $\frac{141}{100}$ だね.

じゃあ, 0.00333... は?

$0.333\cdots \times \frac{1}{100}$ と考えていいから,

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{300}.$$

前半と後半を足すと,

$$\frac{141}{100} + \frac{1}{300} = \frac{424}{300} \quad \text{分数だね.}$$

じゃあ, 1.414111... は?

$$1.414 + 0.000111\cdots$$

$$= \frac{1414}{1000} + 0.000111\cdots$$

もし, この続いている数字が

1 じゃなくて 3 だったら.

さっきのヤツから, さらに 1 つずれてるだけだから,

$$0.000333\cdots = \frac{1}{1000} \times \frac{1}{3} \text{ だ.}$$

0.000111... は, さらにそれを 3 で割ればいい.

$$0.000111\cdots = \frac{1}{1000} \times \frac{1}{3} \div 3$$

$$= \frac{1}{9000} \text{ ということ.}$$

だから,

$1.414111\dots$

$$= \frac{1414}{1000} + \frac{1}{9000} \quad 1414 \times 9 \text{ は, 電卓ででも.}$$

$$= \frac{12726}{9000} + \frac{1}{9000} = \frac{12727}{9000}. \text{ 分数.}$$

こういう数が分数になるのは,

どんな数字の組み合わせでも, 同じ.

毎度おなじみ, 規則性.

規則性はどうやって表す?

そう, 文字で表す.

たとえば,

$a.bcddd\dots$ みたいになってるとき.

この a, b, c, d , は掛け算じゃなくて,

数字を並べて書いている, という意味だよ.

これは,

$$\frac{abc}{100} + \frac{1}{100} \times 0.ddd\dots \text{とも書ける.}$$

ところで.

$$\frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{9} \text{ を使うと}$$

$$0.111\dots = 0.333\dots \div 3 = \frac{1}{9} \text{ になる.}$$

だから,

$$\frac{abc}{100} + \frac{1}{100} \times 0.ddd\dots$$

$$= \frac{abc}{100} + \frac{1}{100} \times d \times \frac{1}{9}$$

$$= \frac{abc}{100} + \frac{d}{900}$$

この2つを足したら、分数の足し算だから、
たしかに分数になる。

$a.bcdeee \dots$ みたいなときは、

$$\frac{abcd}{1000} + \frac{1}{1000} \times 0.eee \dots$$

$$= \frac{abcd}{1000} + \frac{e}{9000}$$

ほら、分数になるよね。

あとは、「かぎりの部分」がいくつ増えても一緒。

ということは、 $\sqrt{2}$ は分数じゃないから、

$$\sqrt{2} = a.bcdeee \dots$$

みたいなことはありえない。

じつはね。

$$\sqrt{2} = 1.41414 \dots \text{とか,}$$

$$\sqrt{2} = 1.4142142142 \dots \text{とか,}$$

そういうこともありえない。

もしそんな繰り返しがでてきてしまうと、

分数になってしまうから。

その理由はゆっくりと考えてもらおうとして、

とにかく。

$$\sqrt{2} = a.bcdeee \dots \text{みたいな}$$

「繰り返しの部分」は出てこない。

かといって、普通の小数でもない。

物知りの人は、「無理数」なんて言葉を知っていて、

$$\sqrt{2} = 1.41421356 \dots$$

ひとよひとよにひとみごろ

なんて歌も知っているかもしれない。

$\sqrt{2}$ に近い小数を探すと、

いつまでもバラバラの数字が並んでいくのだった。

だから、この…には

繰り返しとかそういう意味はなくて、

ただ近い小数探しの計算を続けると、

何かの数字が続くことになる、

という意味しかない。

実は、…って

無責任な記号なのだった。

ところで、ちょっと脱線。

さっきから、

「近い」という単語をたくさん使ってる。

「近い」というのは微妙な単語で、

人によっては 0.33 と $\frac{1}{3}$ が近いと思うだろうし、

また人によっては 0.3333333333 と $\frac{1}{3}$ でも

近いとは認めないかもしれない。

でも、二つの場合を比べたら、

0.3333333333 と $\frac{1}{3}$ の方が
 0.33 と $\frac{1}{3}$ よりも近い、
ということは誰でも確かめられる。

話を戻して。

… という記号はかなり無責任な記号だった。

けど、

$$\sqrt{2} = 1.41421356\dots$$

という表現には、隠された意味がある。

それは、

$\sqrt{2}$ に近い小数はいくらでもたくさん存在する

ということ。

$$\sqrt{2} = 1.41421356\dots$$

という式をみるときは、

ついつい $\sqrt{2}$ 「そのもの」に目が行きがちだけど、

それだけじゃない。

$\sqrt{2}$ のそっくりさんを作りたかったら

いくらでも作れますよ、

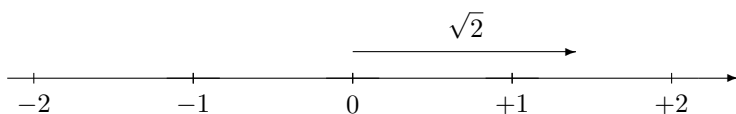
という意味だってあるから。

この考え方には、これからしばらく世話になる。

すきま.

だいぶ前の話に戻って.

「数を直線で表現する」
という考え方があった.



$\sqrt{2}$ は、◇の辺の長さがいいのは変だ
といって付け加えられた数だけど、これは
「直線のどこでも、そこに対応する点があるはずだ」
という考え方と同じ.

直線のどこでも、そこに対応する点があるはず.

この考え方に沿って分数を見てみると、
分数には「すきま」がある.

たとえば $\sqrt{2}$ もそうだし、
実は $1 + \sqrt{2}$ も分数じゃない.

$1 + \sqrt{2} = \frac{b}{a}$ だったら、
 $\sqrt{2} = \frac{b-a}{a}$ になってしまうから.

一般に、 p を分数としたら、
 $p + \sqrt{2}$
は全部分数じゃない.

それどころか、

$$p + 2\sqrt{2}$$

も、全部分数じゃない。

2で割ったら、

$$\frac{p}{2} + \sqrt{2}$$

になってしまうから。

これは2に限った話じゃなくて、

q を0じゃない分数としたら、

$$p + q\sqrt{2}$$

の形の数は、実は全部分数じゃない。

じつは、ものすごくすきまだらけ。

さらにたちの悪いことに、

$$p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3}$$

もやっぱり分数じゃない。

$$p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} + s\sqrt{5} \text{ も} \cdots$$

($\sqrt{4}$ は2だから、次は $\sqrt{5}$ 。)

もっというと、 $\sqrt[3]{2}$ なんてのもあった。

言い出すときりがないからやめておくけど、

分数って、実はすきまだらけだったのだ。

でもたしかにすきまはあるんだけど、

それは「目で見ることのできるすきま」

ではない。

さっき、…の話をしたときに言ったけどね。

たしかに $\sqrt{2}$ は分数じゃないけど、

$1.4 = \frac{14}{10}$ とか $1.41 = \frac{141}{100}$ とか $1.414 = \frac{1414}{1000}$ とか,

「 $\sqrt{2}$ に近い分数」はいくらでも存在する.

なのに, $\sqrt{2}$ そのものは分数じゃない.

これは, 少し不思議なこと.

「 $\sqrt{2}$ の近く」にはたくさんの分数があるのに,
 $\sqrt{2}$ そのものは分数じゃないなんて.

まあとにかく,

こんなにすきまがあるなんて不完全.

だから, 分数を「完全」にしてやろう.

そんなつもりで, 話をすすめる.

極限.

さて、「完全」にするなんて
大きなことを言ってみたけど.

どうやって「完全」にしたらいんだろう？

それを考えるためには,
さっきの「近い」という考え方が,
とても重要になる.

いまたとえば,

0.9

0.99

0.999

...

こんな数たちの列があったとして.
つまり,

0.9

0.99

0.999

...

という数たちが、並んでいたとして.

これは, 0.999... がある,
というのはちょっと意味が違う.
いや, たくさん意味が違う.
0.9, 0.99, 0.999, ... がある, ということ.

この数の列は、どんどん 1 に近づいていく.

「近づく」というのは
あくまでも比較したときの話だけど、
要は距離がだんだんと小さくなっていく、
ということ.

$$1 - 0.9 = 0.1$$

$$1 - 0.99 = 0.01$$

$$1 - 0.999 = 0.001$$

...

ほら、どんどん小さくなっていく.
しつこいけど、今は数の「列」の話をしている
ということを忘れちゃいけない.

こういうとき、

0.9

0.99

0.999

...

という列は、

「1 を極限にもつ」
なんて言ったりする.

「1 を極限にもつ」のは、
あくまでも「列」.
具体的な数じゃない.
それが重要.

数列が極限をもつのであって、
数が極限をもつわけじゃない。

さて. いま, 改めて

0.9

0.99

0.999

...

という並びを見るとき,

0.9 は 1 番目の数

0.99 は 2 番目の数

0.999 は 3 番目の数

...

0.999...9 は n 番目の数

↑ 9 が n 個あるつもり

なんて言える.

さて.

1 番目の数.

2 番目の数.

n 番目の数.

「番目の数」なんて書くのは,

インクの無駄遣いだ.

それに, まどろっこしい.

だから、「番目の数」という文字の代わりに、
 a って書いてみる.

$na \quad na \quad na \quad na$

なんだか掛け算みたい.
だから, 掛け算と区別するために
なんとなく, n を小さくしてみる.

$na \quad na \quad na \quad na$

なんとなく, ひっくり返してみる.

$a_n \quad a_n \quad a_n \quad a_n$

なんとなく, これが気に入った.
だから,

$$0.9 = a_1$$

$$0.99 = a_2$$

$$0.999 = a_3$$

$\dots$

なんて, 書いてみる.
 n 番目の数が, a_n ということ.

さて, n を大きくすることを,
 $n \rightarrow \text{大}$
なんて書いてみる.

そしたら, a_n が 1 に近づくことは,

「 $n \rightarrow \text{大のとき}, a_n \rightarrow 1$ 」

なんて書ける.

これと同じことを,

「 $n \rightarrow \infty$ のとき, $a_n \rightarrow 1$ 」

なんて書いたりするわけだ.

∞ は, 無限大という意味の記号.

限りなく, 大きい.

もともとは「完全にする」なんて話をしてただけど,

なんか違う話をしているように

思われるかもしれない.

でも, この話は「完全にする」ための

下準備だから.

極限と条件.

さて.

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1.4$$

$$a_3 = 1.41$$

$$a_4 = 1.414$$

...

みたいな数の列を作ったとする.

もちろん, この...は無責任だけど,
ちゃんと $\sqrt{2}$ のそっくりさんが続いてるつもり.

そんな, そっくりさんが続く数列について,

「 $n \rightarrow \infty$ のとき, $a_n \rightarrow \sqrt{2}$ 」

といえるはず.

でも, 分数は「完全」じゃないから,

a_n の極限は, 分数じゃない.

さて, 何がしたいのかというと.

この「極限」によって, すきまのない数をつくる.

そういうつもり.

つまり, 分数の数列の「極限」をつけたして,

すきまのない数をつくらうという試み.

でもでも.

数列って、いつでも「極限」をもつ
というわけじゃない。

たとえば、

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = 3$$

...

こうすると、

「 $n \rightarrow \infty$ のとき, $a_n \rightarrow \infty$ 」だ。

まあ、こんなのはまだまし。

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = -2$$

$$a_3 = 3$$

$$a_4 = -4$$

$$a_5 = 5$$

...

こうしてしまうと、

n が偶数ではマイナス、

奇数ではプラスで、よくわからない。

こういう数列に極限があるとは、考えにくい。

だから、極限を持つ「はず」の数列が、

どういう数列なのかを考えなきゃ。

まず.

大きくなりすぎたり,

小さくなりすぎたりしたら,

さっきみたいに困ったことになる.

だから, どんな n についても,

$$-M < a_n < M$$

を満たすような M がどこかにいなければならない.

これが一つめの条件.

次に, 極限をもつということは,

何かにどんどん近づかなきゃいけない.

そうすると,

m と n が十分大きいときは,

a_n と a_m 同士もすごく近くないといけない.

ちょっと言い方を変えると,

適当な 0 に近い数 $\epsilon > 0$ を持ってきたとき,

m と n がある d より大きかったら,

a_m と a_n の差は ϵ より小さくなる.

なんて言い方になる.

ちょっと難しい言い方だけど,

ゆっくりと, ていねいに考えてやれば,

そんなに難しい訳じゃない.

…はず.

この二つ目の条件をみたす数列は,

「コーシー列」なんて呼ばれている.

Cauchy は人の名前.

Abel と Galois の死の原因を作った人,
なんて言ってしまうと,
数学の世界がどろどろに見えてしまったりして.

話を戻して.

今の 2 つの条件を,
数列が極限を持つための条件と考える.

実際に,

$$0.9 = a_1$$

$$0.99 = a_2$$

$$0.999 = a_3$$

...

としたとき,

a_n は $-1 < a_n < 1$ だし,

たとえば $0.002 = e$ とすると,

$a_4 - a_3$ も, $a_5 - a_3$ も, $a_5 - a_4$ も,

とにかくどんな $m, n > 2$ であっても,

$a_m - a_n$ は e より小さくなる.

この 2 つの条件によって,

分数をもっと「広げて」やる.

そうすると, 直線上のどんなところにも,
点を見つけることができる.

それが, 実数なのだった.

実数.

いまの極限の考え方によって,
 $0.333\cdots$ とか,
そんな書き方が正当化される.

$0.333\cdots$ というのは,

0.3
0.33
0.333
...

という数列を考えたときの,
極限のことだと解釈してみる.

極限というのは
近づく先にある数のことだから,
 $0.333\cdots$ はきっかり $\frac{1}{3}$ のことになる.

$0.333\cdots$ が近づくんじゃなくて,
 $0.3, 0.33, 0.333, \cdots$ が $\frac{1}{3}$ に近づいて,
その極限の値を $0.333\cdots$ と書く, ということ.

ほかにも, 例えば $1.414\cdots$ だったら,
 $1, 1.4, 1.41, 1.414, \cdots$ という
そっくりさんたちを集めたときの極限が
 $1.414\cdots$ の値になるということ.

さて.

今まで触れてこなかったけど、
0.333... にまつわる奇妙なはなし.

$$0.333\cdots \times 3 = 0.999\cdots$$

$$\frac{1}{3} \times 3 = 0.999\cdots$$

$$1 = 0.999\cdots$$

そう, こんな話.

まあ, そんな回り道をしなくても,
さっき 0.9, 0.99, 0.999, ... が
1 に近づく話を考えてたから, もっと当たり前に
 $0.999\cdots = 1$
ということになってしまう.

不思議に思う人は, たくさんいるかもしれない.

でも, そんなときは
「0.999... というのは
0.9, 0.99, 0.999, ... の極限の値のこと」
と考え直したら, ちゃんと納得できるかも.

1 も 0.999... も見た目が違いすぎるかな?

うーん. 今までたくさん見てきたけど,
 $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ とか, $\sqrt{25} = 5$ とか,
もっというと, $3 = 1 + 2$ とか,
= があるときは, 全部それぞれの数の別名だった.

だから, 1 にも 0.999... という
別の姿があてい.

むしろ…

$\frac{1}{3}$ は有限の小数では書けない.

$\sqrt{2}$ も, 有限の小数では書けない.

他にも, 有限の小数で書けない数はたくさんある.

一方で,

有限の小数で書けるやつは,

おしりに $999\cdots$ をくっつけたら,

「無限の小数で」書ける.

$$1 = 0.999\cdots$$

$$2 = 1.999\cdots$$

$$24.3 = 24.2999\cdots$$

平等にしてやるには, むしろ,

おしりに $999\cdots$ をつけたほうがいいのかも?

たまにはそんな「冗談」も交えつつ.

じつは, 「冗談」じゃないかもしれないけどね.

さて.

この「無限の小数」を使ったら,

実は全ての実数を表現できる.

たとえば, それぞれを小数では書けないような分数の列

$a_1, a_2, a_3, \cdots$ の極限が a だとしたら,

それぞれにすごく近いような有限の小数の数列

$b_1, b_2, b_3, \cdots$

を作ってしまうと, 同じ極限になるから.

すべての実数を表現できるという意味でも,

小数はよく使われる.

計算は自然数と同じようにできるから手軽で,
しかも直線上のどんな点でも
「無限」の小数で書ける.

だから, 小数はよく使われるの.

ただし, 有限だと限界があることは,
絶対に忘れちゃいけないことだけだね.

それに, 実数の表現は
いつも小数が便利な訳でもなくて,
 $1.414\cdots \times 1.414\cdots$ を計算するのは大変だけど,
 $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ だったらすぐに分かる.

むしろ, $1.414\cdots$ なんて意味不明な数字の列が
掛けたら 2 になる数を表しているということは,
一つの「ネタ」にも感じられる.

いろんな名前があるから,
数学はおもしろい.

だって,
名前ってというのはそもそも規則性のことだから.

実数の先にあるもの.

自然数, 整数, 分数, 代数的数, 小数, 実数.
いろんな考え方で, たくさんの方ができた.

でも, 代数的数と実数の考え方って, だいぶ違う.

代数的数は, 分数で作った $x^5 + 6x^3 + 1 = 0$ みたいな問題,
「代数方程式」の答え.

実数は, 直線上の点みたいに,
分数の「すきま」を埋めてぎっしり詰め込んだもの.

だから, 実数だけど代数的じゃない数とか,
逆に実数じゃないけど代数的な数とか,
そういう数があるかもしれない.

じつは, たしかにそんな数が存在する.
前者をきちんと説明するのは, とても難しい.
でも, 円周率,
 π なんて呼ばれる不思議な数は,
実数だけど代数的じゃないことが分かっている.

これが, この本の最大の天下りの事実.
どうしてそうなるのかは, 説明しない.

でも,
実数じゃないけど代数的な数は,
もう少し簡単に存在を感じてやることができる.

だから…

後ろの後ろは前.

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

こんな代数方程式が, あったとさ.

この解は, $x = \pm\sqrt{-1}$ と表せる.

今までの解き方で, 考えるならば.

でも, $\sqrt{-1}$ って, じつは実数じゃない.

だって, …

実数 y がプラスのとき, y^2 はプラス.

実数 y がマイナスのとき, y^2 はプラス.

後ろの後ろは前. 反対の反対は元通りなのだ.

だから, 正の数でも負の数でも,

同じ実数をかけたら正の数になる.

これは重要.

ということは, $x^2 = -1$ をみたす x は

少なくとも実数ではないってこと.

これは, 昔の人にとっては衝撃だった.

だってね?

分数でも表せない $\sqrt{2}$ があって,

その $\sqrt{2}$ を含むようにして実数をつくって,

直線の上のどんな点も数と対応できるようにしたのに,

まだ「抜け」があった.

でも、直線にきちんと対応する数って、
なんか完全っぽいやん。
根拠はないけど。

だから昔の人は、

$x^2 = -1$ をみたす x なんてそんなものはない

と考えてしまった。

でもね。

代数的数と、実数の考え方は、
もともと違うものだった。

それに、今までたくさん見てきたけれど、
新しい数を見つけるときは、
いつだって何か不都合があった。

だから、もう少し考えてみよう。

$x^2 = -1$ の答えがあるとしたら、どうなるか。

複素数.

ちょっと前に,
 $p + \sqrt{2}$ は分数じゃないとか,
 $p + q\sqrt{2}$ は分数じゃないとか,
そんな話をしたのを覚えてる?
 p, q は分数ね.

実はね.
同じようなことが, $\sqrt{-1}$ にもいえる.

x を実数としたら,
 $x + \sqrt{-1}$ は実数じゃないのだ.

z を実数として
 $x + \sqrt{-1} = z$ なんて書けたら,
実数でないはずの $\sqrt{-1} = z - x$ が
実数にならなきゃいけないから.

数直線上にないものに,
何か数直線上にあるものを足しても,
数直線にくることはないの.

じゃあ, $x + y\sqrt{-1}$ も数直線上にはないのかな.

うん, そのとおり.

だって, $x + y\sqrt{-1} = z$ を満たす
実数 z があったとしたら,
両辺を y で割ってしまうと

$$\frac{x}{y} + \sqrt{-1} = \frac{z}{y}$$

となって、さっきの話と同じようになってしまうから。

じゃあ、 $x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{-2}$ とかだったら？

実はね。このときは、そうとは限らない。
何だか意味不明かもしれないけど。

たとえば、 $y = \sqrt{2}, z = -1$ のときを考えてみる。

$$x + \sqrt{2} \times \sqrt{-1} - \sqrt{-2}$$

こんな式になる。

ときに、 $\sqrt{2} \times \sqrt{-1}$ ってね。

2 乗したら、

$$(\sqrt{2} \times \sqrt{-1}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{-1})$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{2} \times \sqrt{-1}$$

$$= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$$

$$= (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{-1} \times \sqrt{-1})$$

$$= 2 \times (-1)$$

$$= -2$$

こんなことになる。

だから、 $\sqrt{2} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-2}$ といえそう。

だって、 $(\sqrt{2} \times \sqrt{-1})^2 = -2$ だもん。

ということで、ちょっと怪しいけど

$$x + \sqrt{2} \times \sqrt{-1} - \sqrt{-2} = x + \sqrt{-2} - \sqrt{-2}$$

$= x$.

x になって、実数になってしまった.

こんな風に、

$\sqrt{-1}$ と $\sqrt{-2}$ の二つを使うと、

直線上に戻ってくることもある.

$\sqrt{-1}$ だけだと、戻ってくることはないのに.

一般に、 a を正の実数として

$\sqrt{-a}$ を考えるとき、

これは $\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$ と同一視できる.

これは、 $\sqrt{-1}$ の実数倍、てこと.

だから、いまは $\sqrt{-1}$ を基準に考えることにして、

2つの実数と $\sqrt{-1}$ を用いて

$$x + y\sqrt{-1}$$

みたいにかかれる数のことを、

「複素数」と呼ぶことにしよう.

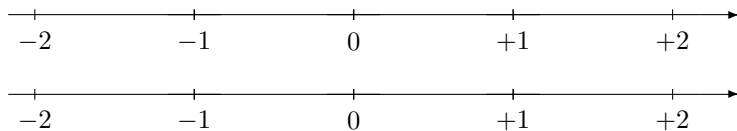
2つの素があるから、複素数.

複素平面と計算と.

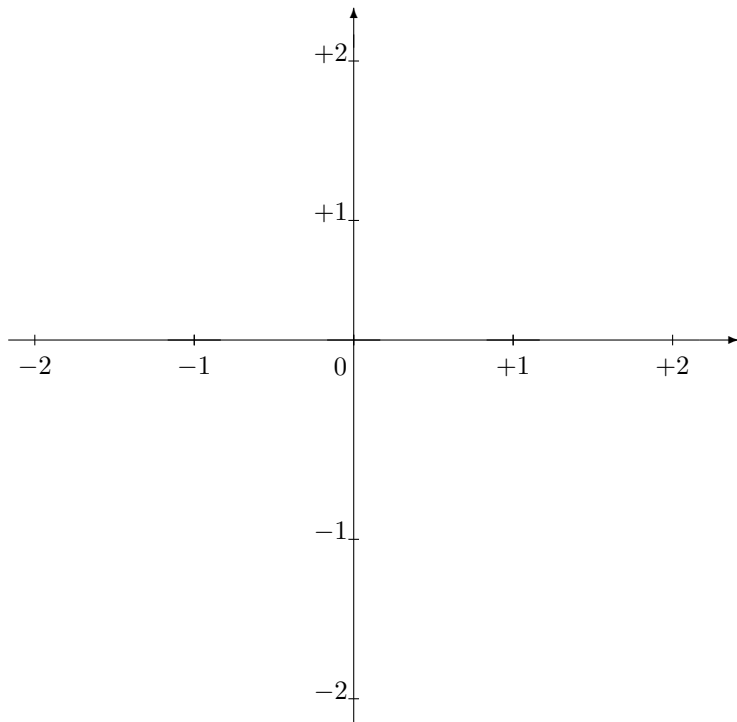
2つの実数.

言い換えると, 2つの直線.

2つの直線と聞いたとき,



こう並べたくなってしまうのが人情かもしれないけど,

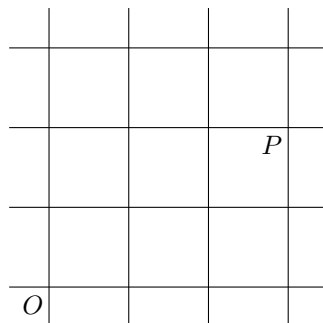


こんな風に並べた人がいた。
その人は、ガウスという名前だった。

あんなの、どこかで見たことがあるはず。
「座標平面」
そんな名前。

僕は今、京都に住んでいるけれど。
京都のまちって、

なんとなくこんなイメージ。

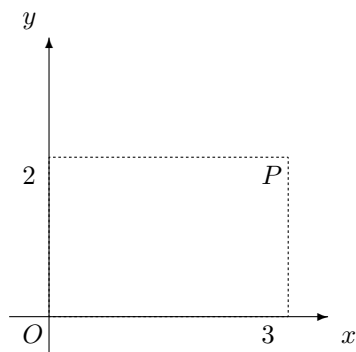


だから、もし O にいて、
 P にいきたい人がいたら、
「交差点 3 つぶん東に進んで、
交差点 2 つぶん北に進んだら P につく」
といえば、たぶん通じる。

さて、そんな風にして、
平面全体の点に名前をつけてしまおう
というのが、座標の考え方だった。

たとえば、
右に 3 進んで
上に 2 進んだ場所 P
というのは、

$(x = 3, y = 2)$ とか、
もっと簡単に $(3, 2)$ とか、
そんな風に表現されるのだった。



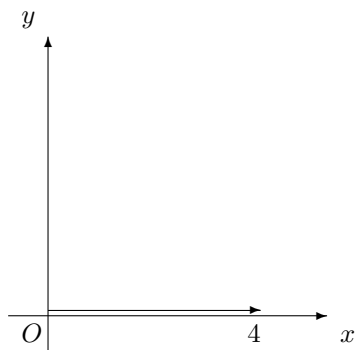
x と y の文字が出てきたから、
もう分かってしまったかもしれない。

複素数を平面で考えようという試みなのだ。

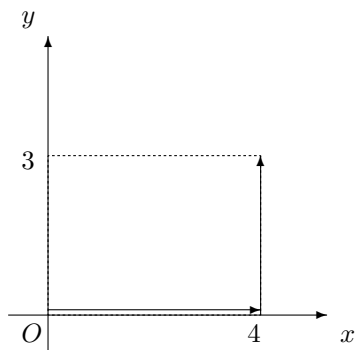
さて。

いま、 $4 + 3\sqrt{-1}$ という数を考えてみよう。

まず、「4」があるから、
 x の方向に 4 だけ進む。
見やすいようにずらして書いたけど、
ほんととは軸にそって 4 進む。



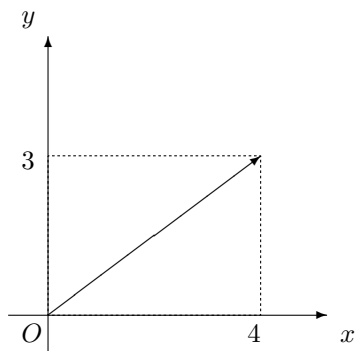
次に、「 $3\sqrt{-1}$ 」があるから、
今度は y の方向に 3 だけ進む。
おしりと頭をくっつけて、
いつもどおりの足し算。



この、「 x に 4, y に 3 進んだところ」が
 $4 + 3\sqrt{-1}$ の対応するところ。

これは、ひとつの→にまとめて、

こんな風に書いてもいい。



今度は、 $4 + 3\sqrt{-1} + (-2)$
という式があったとする。

そしたら、やっぱりいつもの足し算で、
こういうことになる。

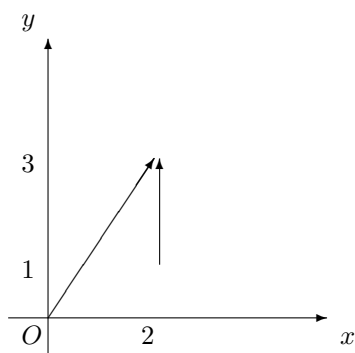
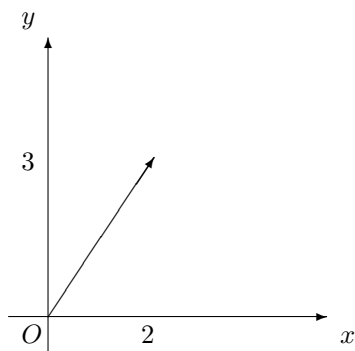
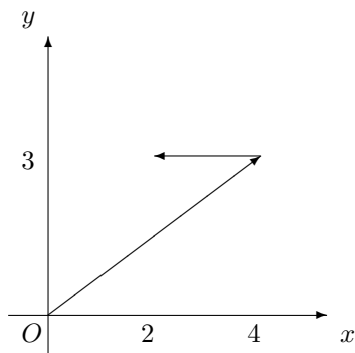
$$4 + 3\sqrt{-1} + (-2) = 2 + 3\sqrt{-1}.$$

記号的に、
 $\sqrt{-1}$ を、 x と同じように考えて
普通に足し算を計算しても、一致するね。

これもやっぱり一つの→にまとめて、
みたいにできる。

これから更に、 $2\sqrt{-1}$ を引くとしたら。
こんな感じ。
引き算だから、頭と頭をくっつけて…

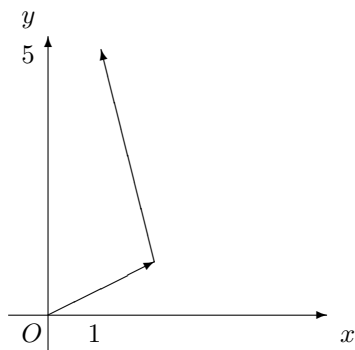
$$2 + 3\sqrt{-1} - 2\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-1}.$$



そろそろ感じが分かってきたかな。
 $(2 + \sqrt{-1}) + (-1 + 4\sqrt{-1})$ だったら。
 こんな風にすればいい。

$$(2 + \sqrt{-1}) + (-1 + 4\sqrt{-1}) = 1 + 5\sqrt{-1}.$$

足し算と引き算は
 今までの方法と似てる。

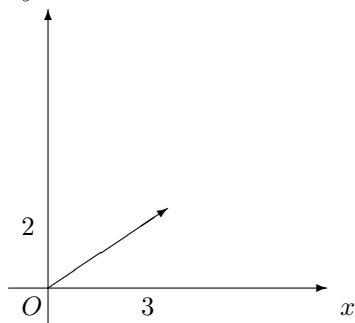


じゃあ、掛け算と割り算はどうなるんだろう？

実は、今までと「同じ」やり方が通用する。 y

今まで掛け算は、
 $\rightarrow$ を取りかえること、なんて考えてきた。
 それを、平面で考えたら
 どうなるかというと。

たとえば、 $(3 + 2\sqrt{-1}) \times 2$ だったら。



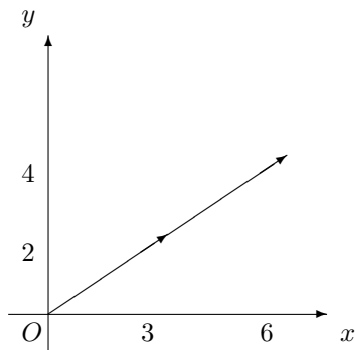
分数のときと同じように、
 まずは $3 + 2\sqrt{-1}$ を書き込んでみる。

で、これを 1 としたときの
 2 がどこにあたるかというと。

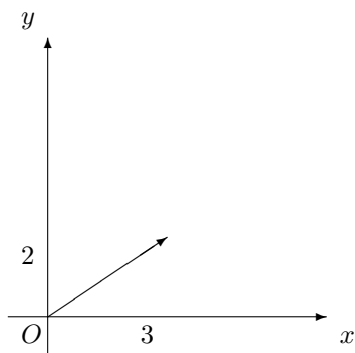
右の図の通り。

$$(3 + 2\sqrt{-1}) \times 2 = 6 + 4\sqrt{-1}.$$

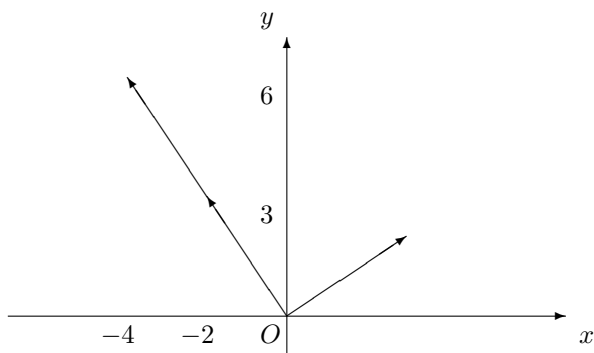
分配法則を使って計算しても、一緒だね。



じゃあ、 $(3 + 2\sqrt{-1}) \times 2\sqrt{-1}$ だったら？



この図の→を1としたら、 $2\sqrt{-1}$ は…
→に対して垂直になっている…



ココ.

※回転の説明には 90 度の概念がほしい…

だから、 $(3 + 2\sqrt{-1}) \times 2\sqrt{-1}$ は、

$-4 + 6\sqrt{-1}$.

これって、

$$(3 + 2\sqrt{-1}) \times 2\sqrt{-1}$$

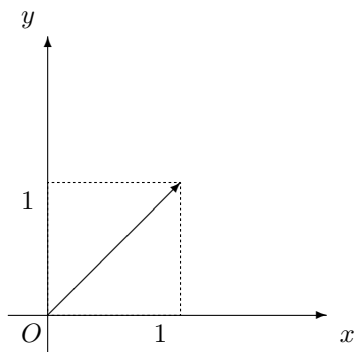
$$\begin{aligned}
&= 3 \times 2\sqrt{-1} + 2\sqrt{-1} \times 2\sqrt{-1} \\
&= 6\sqrt{-1} + 2 \times 2 \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \\
&= 6\sqrt{-1} - 4 \\
&= -4 + 6\sqrt{-1}
\end{aligned}$$

ほら, 同じ結果.

まだちょっとわかりにくいかもしれないけど,
掛け算も一応同じルールで考えることができる.

じゃあ, 今度は

$(1 + \sqrt{-1}) \times (1 + \sqrt{-1})$ を考えてみよう.



$1 + \sqrt{-1}$ は

いつぞや考えたあの正方形の,
あの斜めの線と同じ意味をもっていたりする.

だから.

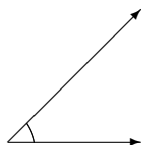
二つの軸の, ちょうど真ん中を走っていることに,
注意する.

角度で言うと, 45° .

90°が直角で、その半分が45°なのだった。
一回転だと360°で、
それは1年の日数が365なのと関係してる…
なんてことは、どうでもいい話だった。

話を戻して、
 $1 + \sqrt{-1}$ たちの掛け算を考えるとどうなるか。

$1 + \sqrt{-1}$ は、1 に対して
「ちょうど半分」の45°起き上がったところにある。
長さは、 $\sqrt{2}$ だった。



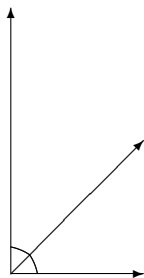
これを、 $\langle \sqrt{2}, 45^\circ \rangle$
なんて書いてみる。

複素数にも、 $x + y\sqrt{-1}$ だけでなく、
いろんなお洒落な名前があってもいいじゃない。

さて。

$1 + \sqrt{-1} = \langle \sqrt{2}, 45^\circ \rangle$ を「いち」にすると、
新しい $1 + \sqrt{-1}$ は、それに対してさらに
長さが $\sqrt{2}$ 倍で、45°起き上がったところにある。

45°+45°の方向に、 $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ の長さ。
 $\langle 2, 90^\circ \rangle$ なんて書ける。



ところで、これって、

$\langle 2, 90^\circ \rangle$ って、 $2\sqrt{-1}$ に他ならない.

90° . 垂直. まっすぐ交わるところ.

ちなみに、分配法則で「計算」してみると、

$$\begin{aligned} & (1 + \sqrt{-1})(1 + \sqrt{-1}) \\ &= 1 + 2\sqrt{-1} + (\sqrt{-1})^2 \\ &= 1 + 2\sqrt{-1} + (-1) = 2\sqrt{-1} \end{aligned}$$

確かに一致してる.

さて.

$1 + \sqrt{-1}$ は、長さが $\sqrt{2}$ の複素数だから、
今度は長さが 1 で 45° の方向を向いている
複素数を考えてみる.

$\langle 1, 45^\circ \rangle$ てこと.

$\langle 1, 45^\circ \rangle = \langle \sqrt{2}, 45^\circ \rangle \div \sqrt{2}$ と考えたら、

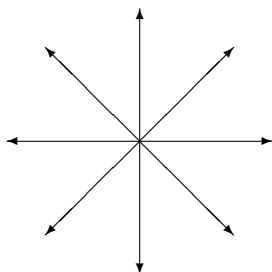
$$\frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}$$

なんて書き方もできる.

この $\langle 1, 45^\circ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}$ を、

n 回かけたとき, どうなるか.

$\langle 1, 45^\circ \rangle$ で考えたら,
大きさは変わらずに, 45° ずつ回って,
こんな風になるはず.



くるくるくるくる, きれいな形.

本当にそうなるかどうかは,
 $(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1})^n$ を
気合を入れて計算してみたらわかる.

僕は計算は嫌いだから, やらないけどね.
不親切?
そうかもしれない.

ちなみに.
計算するときは, $(\frac{1}{\sqrt{2}})^n (1 + \sqrt{-1})^n$
と考えたほうが, 楽だよ.

まあとにかく.
実数が直線とうまく対応するなら,
複素数は平面とうまく対応するということ.

確かに身近な数は
ほとんど直線と対応していて、
数といえば直線みたいなイメージがあるかもしれない。
けど、数が直線に対応しなければならないなんて、
そんな決まりはどこにもないから。

だって、世の中上には上がいて、
三次元空間と対応できる数だってあるんだよ。

最後のほうのはなしは、
ちょっと難しかったかもしれない。
だから、という訳じゃないけど、
おしまいに小話をひとつ。

左の左は…？

今, あなたが, 左を向いて
更に左を向いたとしたら,
どこを向きますか？

そう, うしろを向きますね.
「左を向く」ことを x と書いたら, …？

ちゃんちゃん.

あとがき.

「複素数（虚数）は存在しない」といった種々の誤解を解きほぐしつつ、初歩的な数学の疑問に「正面から」答えることを目的として書き始めましたが、実はそれが達成されているかどうかは怪しいです.

行列の積の「やさしい」導入とか、実際問題「誰が得をするんだ」と言われそうなネタはもう少しあります. でも、書いてませんけど.

感想とか、ここが分かりにくいとかここがダメとかお前は最低だとか、思ったことがあれば何でも気軽にお伝えください. Web page に匿名用メルフォームもあります.

たくさんの人からご意見を賜っております. 感謝しております. 各人の名前を挙げたいのは山々ですが、それは出版されたときのお楽しみ.